АКАДЕМИЯ НАУК СССР

MTA Számítástechnikai Könyvtára

РАДИОТЕХНИКА И ЭЛЕКТРОНИКА

Том VI

8

1961

ИЗДАТЕЛЬСТВО АКАДЕМИИ НАУК СССР

Главный редактор В. А. КОТЕЛЬНИКОВ

Заместитель гл. редактора: Д. В. ЗЕРНОВ, Ю. Б. КОБЗАРЕВ

Редакционная коллегия:

А. И. БЕРГ, Б. А. ВВЕДЕНСКИЙ, И. С. ГОНОРОВСКИЙ, В. Л. ГРАНОВСКИЙ, Л. А. ЖЕКУЛИН, Н. Д. ДЕВЯТКОВ, Л. Н. ДОБРЕЦОВ, А. Н. КАЗАНЦЕВ, С. Г. КАЛАШНИКОВ, П. Л. КАПИЦА, В. В. МИГУЛИН, А. Л. МИКАЭЛЯН, А. А. ПИСТОЛЬКОРС, А. М. ПРОХОРОВ, С. М. РЫТОВ, В. И. СИФОРОВ, Я. Н. ФЕЛЬД, С. Э. ХАЙКИН, Б. М. ЦАРЕВ

Ученый секретарь редакции Г. А. БЕРНАШЕВСКИЙ

MTA. Számtechn. Könyvtára
Leltározva
1962. év 482 sz.

РАДИОТЕХНИКА
И
ЭЛЕКТРОНИКА

MTA Számítástechnikai Könyvtára

Том VI АВГУСТ 1961 Вып. 8

СОДЕРЖАНИЕ

Арманд Н. А., Введенский Б. А. Об учете диаграмм направленности антенн при дифракции радиоволн вокруг Земли 1219
Кубасов П. Е. Исследование пространственно-временных корреляционных связей уровня поля сантиметровых волн при распространении в турбулентной атмосфере. 1228
Пирман Я. Д. Статистический анализ оптимального разрешения 1237
Малюжинец Г. Д., Вайнштейн Л. А. Поперечная диффузия при дифракции на импедансном цилиндре большого радиуса. Ч. I. Параболическое уравнение в лучевых координатах. 1247
Каскинд М. Д. Возбуждение волн на импедансной плоскости 1259
Кинбер Б. Е. О дифракции электромагнитных волн на вогнутой поверхности кругового цилиндра 1273
Заганов Р. Б., Мериакри В. В. Подавление резонансных явлений в многоволновых волноводах. 1284
Павлов П. П. Электромагнитное поле и распределение тока вдоль бесконечно длинного изолированного провода в проводящей среде 1293
Виглин С. И. Переходная характеристика коаксиальной системы с периодической структурой 1308
Лазарев А. В., Филимонов Г. Ф. Статический режим плоского магнетрона . . . 1316
Постнов Г. А. О возможности существования медленных волн в изотропном плазменном волноводе 1325
Апушкинский Г. П. К вопросу о чувствительности радиометров 1328
Грибников З. С., Компан В. Н., Святогор Л. В. Исследование канальных триодов 1330
Глинсон М. И., Добрякова Ф. Ф., Крапивин В. Ф., Малина З. А., Яснопольская А. А. О теории автоэлектронной и термоавтоэлектронной эмиссий металлов и полупроводников 1342
Коган Ш. М. Тепловое излучение, создаваемое горячими носителями тока в полупроводниках 1354
Цер-Шварц Г. В., Кушнир Ю. М., Розенфельд Л. Б., Зайцев П. В., Безлепкин С. В., Трутнева И. С., Беленький С. А., Титов Л. А. Некоторые вопросы отражательной электронной микроскопии 1358
Зерцнер В. Н., Никифорова В. Г., Богдановский Г. А., Козелкин В. В., Щетнев Ю. Ф. Светоэлектронный микроскоп ЭМ-6 1365
Берлага Р. Я., Коноров П. П., Руденок М. И. Электронно-микроскопические исследования поверхности германия 1370
Милянкевич А. Н. Расчет характеристик рассеяния электронов средних энергий на свободных атомах 1374
Стоянов П. А., Гришина Н. М. Устранение астигматизма промежуточной линзы электронного микроскопа с помощью стигматора при микродифракции 1378
Стоянов П. А. Юстировка электронного микроскопа при помощи электромагнитных полей 1382
Воробьев Ю. В. Анализ аберраций, возникающих из-за дефектов изготовления и юстировки электронных микроскопов 1386

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

Просин А. В. К расчету полосы пропускания тропосферы при дальнем распространении УКВ 1392
Минкович Б. М., Давидчевский Ю. И. К синтезу антенны с круглым раскрывом 1395
Ильинский Ю. А., Карасев М. Д. Переходные процессы в двухконтурном параметрическом усилителе 1397
Страшкевич А. М. О моделировании и расчете траекторий релятивистских заряженных частиц в электростатических полях 1401
Троицкий Ю. В. Двуханодный электронный прожектор для электронных приборов СВЧ 1402
Иванов С. Н. О распределении примесей в области сварного контакта на арсениде галлия. 1404
Фоменко В. С. Термоэмиссионные свойства карбидов гафния и ниобия и боридов скандия и тулия 1406

ХРОНИКА

Яснопольская А. А., Вихляева Р. П., Екименко Т. М. Междуведомственный семинар по катодной электронике (19-е заседание) 1407

Адрес редакции: Москва К-9, Моховая, 11, Институт радиотехники и электроники АН СССР, редакция журнала «Радиотехника и электроника»

Технический редактор *Т. А. Аверкиева*

Т-08844 Подписано к печати 29.VII. 1961г. Тираж 6000 Зак. 1931
Формат бум. 70×108¹/₁₆ Печ. л. 1644+1 вкл. Бум. л. 6 Уч.-изд. листов 18,6

2-я типографии Издательства Академии наук СССР Москва, Шубинский пер., 10

9 6 1 № 8

ОБ УЧЕТЕ ДИАГРАММ НАПРАВЛЕННОСТИ АНТЕНН ПРИ ДИФРАКЦИИ РАДИОВОЛН ВОКРУГ ЗЕМЛИ

Н. А. Арманд, Б. А. Введенский

Исследовано дифракционное поле направленной антенны, плоскость которой нормальна к земной поверхности. Показано, что в случае низко расположенной антенны ее направляющие свойства при вычислении дифракционного поля можно учесть умножением формул поля диполя на коэффициент направленного действия антенны. В случае высоко расположенной антенны дифракционное поле определяется той частью потока энергии, которая излучается антенной в направлении на горизонт.

ВВЕДЕНИЕ

Обычно в приложениях результатов решения задачи о дифракции диоволн вокруг Земли, где источником радиоволн является диполь ектрический или магнитный), направляющие свойства реальных антенн итываются простым умножением формул для потока мощности излу- ия диполя на коэффициент направленного действия антенн (кнд) *.

Однако корректность такой операции не очевидна. В самом деле, в е полутени и, особенно, в зоне тени характер поля в существенной пени определяется свойствами земной поверхности, вследствие чего ивидуальные свойства различных антенн в этих зонах должны в изве- ой мере нивелироваться.

Любую антенну можно представить в виде множества диполей. Поэ- у поле любой антенны выражается или суммой, или интегралом от лей этих диполей. Мы можем ограничиться случаем вертикального ментарного магнитного диполя, потому что для него в диапазоне В практически всегда можно существенно упростить расчеты, считая ерхность Земли идеально проводящей.

Из сказанного следует простой способ вычисления дифракционного я направленной антенны, суть которого сводится к тому, что изве- ые дифракционные формулы для поля диполя необходимо проин- рировать (или просуммировать) по совокупности диполей, составляю- х антенну. Предварительно, однако, мы остановимся на некоторых ормулах, относящихся к свойствам направленной антенны в свобод- м пространстве.

1. ПРЕДВАРИТЕЛЬНОЕ ЗАМЕЧАНИЕ

Для антенны в свободном пространстве (будем рассматривать пря- тольную антенну с размерами d_1 и d_2) с равномерно распределенным ее раскрыву магнитным моментом поверхностной плотности M, как естно [1], для полей E и H справедлива формула

$$E = H = 4\cos\psi\, M \frac{e^{ikD}}{D} \frac{\sin\left(\frac{kd_1}{2}\sin\varphi\right)\sin\left(\frac{kd_2}{2}\sin\psi\right)}{\sin\varphi\sin\psi}, \qquad (1)$$

$k = 2\pi/\lambda$ — волновое число; D — расстояние от центра антенны до ки приема; φ — азимутальный угол; ψ — угол места. В главном на-

* Под кнд мы будем понимать отношение потока мощности, излучаемой антенной авном направлении, к потоку мощности изотропного излучателя, причем кнд опре- ется на основе излучающих свойств антенны в свободном пространстве.

правлении ($\varphi = \psi = 0$)

$$E = H = k^2 M d_1 d_2 \frac{e^{ikD}}{D}. \tag{2}$$

Вектор Пойнтинга в этом направлении будет

$$S = \frac{c}{8\pi} EH^* = \frac{c}{8\pi} \frac{k^4 |M|^2 d_1^2 d_2^2}{D^2}. \tag{3}$$

С другой стороны, в этом же направлении

$$S = \frac{P}{4\pi D^2} G, \tag{4}$$

где P — мощность излучения; G — кнд по мощности по отношению к изотропному излучателю.

Из сравнения (3) и (4) следует

$$|M| = \frac{\sqrt{\frac{2PG}{c}}}{k^2 d_1^2 d_2^2}. \tag{5}$$

2. ВЛИЯНИЕ НАПРАВЛЕННОСТИ АНТЕННЫ В ГОРИЗОНТАЛЬНОЙ ПЛОСКОСТИ

Следуя В. А. Фоку [2], поле вертикального магнитного диполя определим формулами

$$H_r = E_\varphi = k^2 M_0 \frac{e^{ika\theta}}{a\sqrt{\theta \sin \theta}} V(x, y_1, y_2), \tag{6}$$

где a — радиус Земли ($a_э$ — эквивалентный радиус Земли); θ — полярный угол между направлениями из центра Земли на передатчик и приемник (угловое расстояние); M_0 — дипольный момент; $V(x, y_1, y_2)$ — функция ослабления, которая в зоне тени определяется одночленной формулой

$$V(x, y_1, y_2) = -2e^{i\pi/4} \sqrt{\pi x} e^{ixt} g(y_1)\, g(y_2), \tag{7}$$

где *

$$g(y) = -\frac{w_1(t-y)}{w_1'(t)}; \tag{8}$$

$$x = m\frac{D}{a_э}; \qquad D = a\theta;$$
$$y = \frac{kh}{m}; \qquad m = \left(\frac{ka_э}{2}\right)^{1/3}; \tag{9}$$

D — расстояние между корреспондирующими пунктами; h_1 — высота передатчика; h_2 — высота приемника (им соответствуют y_1 и y_2); $w_1(t-y)$ — функция Эйри; $t = 2{,}338\, e^{i\pi/3}$ — первый корень функции Эйри.

В случае прямоугольной антенны, плоскость которой нормальна поверхности Земли, вместо (6) имеем

$$H_r = E_\varphi = \frac{k^2 M}{a} \int_{-d_1/2}^{d_1/2} \frac{e^{ika\gamma}}{\sqrt{\gamma \sin \gamma}} d\xi \int_{\eta_1}^{\eta_2} V(x, y_1, y_2)\, dh. \tag{10}$$

Здесь η_1 и η_2 — высоты нижнего и верхнего краев антенны ($\eta_2 - \eta_1 = d_2$); M — плотность магнитного момента; γ — угловое расстояние от точки

* Мы положили $q = \infty$, что соответствует нашему случаю.

интегрирования до точки приема,

$$\cos\gamma = \sin\theta\sin\alpha\cos(\varphi - \varphi') + \cos\theta\cos\alpha; \tag{11}$$

— угловое расстояние от точки приема до центра антенны; α — угловое расстояние точки интегрирования; φ — азимут точки приема; φ' — азимут точки интегрирования. Так как углы θ, α, γ малы, то из (11) можно получить, что

$$\gamma \simeq \sqrt{\theta^2 + \alpha^2 - 2\theta\alpha\cos(\varphi - \varphi')} \tag{12}$$

или при $\rho = a\gamma$, $D = a\theta$, $\xi = a\alpha$

$$\rho = \sqrt{D^2 + \xi^2 - 2D\xi\cos(\varphi - \varphi')}. \tag{13}$$

Так как $D \gg d_1$, то

$$\rho \simeq D - \xi\cos(\varphi - \varphi'). \tag{14}$$

Первое интегрирование в (10) дает

$$H_r = E_\varphi = 2kM\frac{e^{ikD}}{D}\frac{\sin\left[\frac{kd_1\cos(\varphi - \varphi')}{2}\right]}{\cos(\varphi - \varphi')}\int_{\eta_1}^{\eta_2} V(x, y_1, y_2)\,dh. \tag{15}$$

Так как азимут точки интегрирования φ' можно положить равным $\pi/2$, то

$$H_r = E_\varphi = 2kM\frac{e^{ikD}}{D}\frac{\sin\left[\frac{kd_1\sin\varphi}{2}\right]}{\sin\varphi}\int_{\eta_1}^{\eta_2} V(x, y_1, y_2)\,dh. \tag{16}$$

Сравнение этой формулы с формулой (1) приводит к выводу о том, что как в случае свободного пространства, так и в случае дифракции направленные свойства антенны в горизонтальной плоскости описываются одной и той же функцией $\dfrac{\sin\left(\frac{kd_1\sin\varphi}{2}\right)}{\sin\varphi}$.

Таким образом, направленные свойства антенн в горизонтальной плоскости в случае дифракции вокруг Земли сохраняются. В частном случае главного направления ($\varphi = 0$) (см. (5))

$$H_r = E_\varphi = \frac{1}{d_2}\sqrt{\frac{2PG}{c}}\frac{e^{ikD}}{D}\int_{\eta_1}^{\eta_2} V(x, y_1, y_2)\,dh. \tag{17}$$

Строго говоря, при этом мы ввели допущение, что в условиях свободного пространства антенна (при одинаковом распределении магнитного момента или поля по ее раскрыву) излучает одну и ту же мощность. Это допущение можно считать оправданным, если антенны приподняты над поверхностью Земли на высоту, превышающую несколько длин волн *. В случае УКВ-антенн это условие практически всегда выполняется.

3. ВЛИЯНИЕ НАПРАВЛЕННОСТИ АНТЕННЫ В ВЕРТИКАЛЬНОЙ ПЛОСКОСТИ

Вопрос о влиянии направленности антенны в вертикальной плоскости более сложен. Основная трудность здесь заключается в том, что функцию ослабления $V(x, y_1, y_2)$ не удается проинтегрировать в общем виде, так как неизвестен аналитический вид интеграла $\int_0^z w(t)\,dt$, где $w(t)$ —

* См. по этому поводу, например, [3], стр. 75—78, где речь идет о плоской Земле. Можно думать, что и в случае сферической Земли выводы, сделанные в [3], останутся прежними.

функция Эйри. Однако это интегрирование можно выполнить численно, так как имеются таблицы высотных множителей [4].

Воспользуемся формулой (7). Тогда выражение (17) перепишется в виде

$$H_r = E_\varphi = -\frac{2}{d_2}\sqrt{\frac{2PG}{c}}\frac{e^{ikD+\frac{i\pi}{4}+ixt}}{D}\sqrt{\pi x}\,g(y_2)\int_{\eta_1}^{\eta_2} g(y_1)\,dh \tag{18}$$

или, если по формуле (9) перейти к переменной интегрирования y,

$$H_r = E_\varphi = -2\sqrt{\frac{2PG}{c}}\frac{e^{ikD+\frac{i\pi}{4}+ixt}}{D}\frac{\sqrt{\pi x g(y_2)}}{y_2' - y_1'}\int_{y_1'}^{y_2'} g(y)\,dy \quad (y_{1,2}' = k\eta_{1,2}/m). \tag{19}$$

Величина

$$I = \frac{1}{y_2' - y_1'}\int_{y_1'}^{y_2'} g(y)\,dy, \tag{20}$$

равная среднему по высоте значению высотного множителя диполя, имеет смысл высотного множителя антенны.

Сравнение (20) с (7) приводит к выводу, что отношение полей антенны и диполя в нашем случае не просто равно $\sqrt{G}$, как это имеет место в свободном пространстве, а равно $\sqrt{G}I/g(y_A)$, где y_A — приведенная высота диполя, которая естественно совпадает со средней приведенной высотой антенны $\left(y_A = \frac{1}{2}(y_2' - y_1')\right)$. Появление поправочного коэффициента

$$L = \frac{I}{g(y_A)} = \frac{\int_{y_1'}^{y_2'} g(y)\,dy}{(y_2' - y_1')\,g(y_A)} \tag{21}$$

обусловлено явлением дифракции.

Отметим, что отношение полей, излучаемых направленной антенной и диполем, в зоне дифракции не зависит от высоты приемной антенны. Это обстоятельство не имеет места в случае свободного пространства и вызвано тем, что в зоне дифракции структура поля зависит только от формы и электрических свойств земной поверхности. Математически это связано с тем, что мы воспользовались для вычислений одночленной дифракционной формулой. Если мы из зоны тени будем приближаться к зоне полутени, то для вычисления величины напряженности поля необходимо учитывать все большее количество членов дифракционного ряда; поэтому в зонах полутени и тени отношение полей антенны и диполя будет зависеть от высоты точки приема.

Для вычисления поправочного коэффициента L мы при помощи таблиц [4] произвели численное интегрирование высотного множителя $g(y)$ и составили таблицы интеграла

$$K(y) = \int_0^y g(t)\,dt. \tag{22}$$

Интегрирование производилось по формуле трапеций с шагом 0,1 *. Значения интеграла (22) даны в таблице.

* Контрольные вычисления по формуле Симпсона были произведены Г. Б. Линковским, которому авторы выражают искреннюю благодарность. Эти вычисления подтвердили точность наших вычислений до долей процента.

Вычисления, произведенные на основе данных таблицы, показывают, что при изменении приведенной высоты антенны y'_A от 0 до 4,5 (действительная высота приблизительно меняется, например, от 0 до 450 *м* при $\lambda = 300$ *см* и от 0 до 17 *м* при $\lambda = 3$ *см*) и приведенного вертикального размера антенны $y'_2 - y'_1$ от 0 до 1 (действительный размер антенны, например, меняется от 0 до 100 *м* при $\lambda = 300$ *см* и от 0 до 4 *м* при $\lambda = 3$ *см*) множитель L мало отличается от единицы (в наших вычислениях минимальное значение L равнялось 0,86).

Полученный результат означает, что в указанных пределах приведенных высот направленные свойства антенн с достаточной для практики точностью можно учесть умножением дифракционных формул диполя на кнд антенн. Таким образом, простой метод учета направленных свойств антенн, о котором говорилось в начале статьи, для этих высот оправдан. Условия несколько меняются при больших высотах антенн (см. ниже).

4. О ВОЗМОЖНОСТИ ИНТЕГРИРОВАНИЯ ВЫСОТНОГО МНОЖИТЕЛЯ

Интеграл (22) высотного множителя можно выразить при сравнительно небольших высотах антенн через известные функции. Это следует из дебаевской (тригонометрической) аппроксимации высотных множителей, которой пользовались в ранних работах по дифракции радиоволн вокруг Земли [5, 6, 7]. К этой аппроксимации можно прийти из формул данной статьи следующим путем. Так как высотный множитель удовлетворяет уравнению Эйри [8]

$$\frac{d^2g}{dy^2} + (y - t)\, g = 0 \qquad (23)$$

с начальными условиями

$$g(0) = 0,$$

$$g'(0) = 1, \qquad (24)$$

Таблица

Значения $K(y)$ по формуле (22)

y	ReK (y)	ImK (y)	y	ReK (y)	ImK (y)	y	ReK (y)	ImK (y)	y	ReK (y)	ImK (y)	y	ReK (y)	ImK (y)
0,0	0,000	0,000	1,0	0,527	0,089	2,0	1,869	1,412	3,0	—0,788	5,126	4,0	—5,835	4,131
0,1	0,005	0,000	1,1	0,640	0,131	2,1	1,966	1,694	3,1	—0,322	5,460	4,1	—6,379	3,312
0,2	0,020	0,000	1,2	0,763	0,187	2,2	2,037	2,008	3,2	—0,219	5,793	4,2	—6,791	2,365
0,3	0,045	0,001	1,3	0,896	0,259	2,3	2,074	2,351	3,3	—0,829	5,945	4,3	—7,040	1,309
0,4	0,081	0,002	1,4	1,035	0,347	2,4	2,069	2,721	3,4	—1,500	6,061	4,4	—7,097	0,172
0,5	0,127	0,006	1,5	1,180	0,458	2,5	2,016	3,112	3,5	—2,220	6,072	4,5	—6,936	—1,012
0,6	0,185	0,011	1,6	1,328	0,593	2,6	1,906	3,520	3,6	—2,961	5,963	4,6	—6,540	—2,199
0,7	0,253	0,021	1,7	1,475	0,753	2,7	1,733	3,936	3,7	—3,725	5,722	4,7	—5,898	—3,343
0,8	0,333	0,036	1,8	1,617	0,942	2,8	1,492	4,350	3,8	—4,477	5,339	4,8	—5,010	—4,390
0,9	0,424	0,058	1,9	1,750	1,162	2,9	1,178	4,751	3,9	—5,190	4,808	4,9	—3,886	—5,286
1,0	0,527	0,089	2,0	1,869	1,412	3,0	0,788	5,126	4,0	—5,835	4,131	5,0	—2,549	—5,974

то, решая уравнение (23) с начальными условиями (24) по методу ВКБ (см., например, [9, 10]), можно получить

$$g(y) \simeq \frac{\sin\left[\frac{2}{3}(y-t)^{3/2} - \frac{2}{3}(-t)^{3/2}\right]}{\sqrt[4]{(-t)(y-t)}}. \tag{25}$$

Известно, что эта аппроксимация практически удовлетворительна при сравнительно небольших высотах антенн.

В этом случае

$$K(y) = \int_0^y \frac{\sin\left[\frac{2}{3}(\xi-t)^{3/2} - \frac{2}{3}(-t)^{3/2}\right]}{\sqrt[4]{(-t)(\xi-t)}}\, d\xi. \tag{26}$$

Если в этом интеграле сделать подстановку

$$\tau = \sqrt{\frac{2}{3}}(\xi - t)^{3/4}, \tag{27}$$

то он получит вид

$$K(y) = \frac{2\sqrt{\frac{2}{3}}}{\sqrt[4]{(-t)}} \int_{\sqrt{\frac{2}{3}}(-t)^{3/4}}^{\sqrt{\frac{2}{3}}(y-t)^{3/4}} \sin\left[\tau^2 - \frac{2}{3}(-t)^{3/2}\right] d\tau. \tag{28}$$

Так как функция

$$F(z) = \int_0^z e^{t^2} dt \tag{29}$$

табулирована в комплексной плоскости [11, 12, 13], то вычисление интеграла (28) не представляет затруднений. Однако это вычисление более громоздко, чем непосредственное численное интегрирование высотных множителей.

5. СЛУЧАЙ БОЛЬШИХ ВЫСОТ

Случай больших высот, точнее случай, когда

$$y_A \gg 1, \tag{30}$$

требует особого рассмотрения. Неравенство (30) позволяет при вычислении поправочного коэффициента L воспользоваться асимптотическим представлением функций Эйри [8]

$$w_1(t-y) = \frac{e^{i\pi/4}}{\sqrt[4]{y-t}}\, e^{i\frac{2}{3}(y-t)^{3/2}} \tag{31}$$

и получить приближенно (см. Приложение)

$$L = \frac{\sin\left[\frac{(y_2'-y_1')\sqrt{y_A}}{2}\right]}{\frac{(y_2'-y_1')\sqrt{y_A}}{2}}. \tag{32}$$

Эта формула получена при выполнении совокупности неравенств

$$d_2 \ll 2h_A, \tag{33}$$

$$h_A \gg \frac{3}{8}\sqrt[3]{3}(a_э\lambda^2)^{1/3}. \tag{34}$$

Если воспользоваться соотношениями (9) и выразить приведенные высоты через фактические, то получим, что

$$(y_2' - y_1')\sqrt{y_A} = kd_2\sqrt{\frac{2h_A}{a_э}}, \tag{35}$$

но

$$\sqrt{\frac{2h_A}{a_э}} \simeq \sin\beta, \tag{36}$$

где β — угол между перпендикуляром к плоскости антенны и плоскостью горизонта, проведенной из центра антенны. Таким образом, поправочный множитель

$$L \simeq \frac{\sin\left(\frac{kd_2\sin\beta}{2}\right)}{\frac{kd_2\sin\beta}{2}} \tag{37}$$

представляет собой диаграмму направленности антенны в вертикальной плоскости, взятую для угла β. Это означает, что напряженность дифракционного поля определяется той частью поля, которая излучается антенной в направлении на горизонт.

При $\sin\beta = 2\pi/kd_2 = \lambda/d_2$ на основании формулы (37) L обращается в нуль, но в действительности получается хотя и малая, но конечная величина

$$L \simeq \frac{1}{2}\frac{t}{y_A}, \tag{38}$$

что следует из более точных вычислений (см. Приложение). Спадание поля почти до нуля означает, что главный лепесток диаграммы направленности перестает «касаться» поверхности Земли. То обстоятельство, что вместо нуля получается конечная величина порядка (38), обусловлено чисто дифракционными эффектами и связано с тем, что при «отрыве» от земной поверхности главного лепестка начинает сказываться в дифракционной зоне поле боковых лепестков диаграммы направленности.

ВЫВОДЫ

1. Направленные свойства антенны в горизонтальной плоскости в случае дифракции вокруг Земли сохраняются.

2. Высотные профили полей антенн различной направленности в дифракционной зоне подобны друг другу.

3. При сравнительно низких высотах антенн их направленные свойства для дифракционного поля можно учесть простым умножением формул для напряженности поля, излучаемого элементарным диполем, на коэффициент направленного действия антенны, излучающей в условиях свободного пространства.

В случае больших высот дифракционное поле диполя необходимо умножать на кнд антенны и на ее диаграмму направленности в вертикальной плоскости, взятую при значении угла, образуемого осью антенны и плоскостью горизонта, проведенной через центр антенны.

Это положение является конкретной иллюстрацией принципа локального поля, по которому поле в дифракционной зоне определяется лучом, касающимся поверхности Земли.

Мы проводили исследование для случая передающей антенны. Из соображений теоремы взаимности полученные выводы имеют место и для приемной антенны.

ПРИЛОЖЕНИЕ

При больших значениях y справедливо асимптотическое представление (3), поэтому

$$L=\frac{\int\limits_{y_1'}^{y_2'} g(y)\,dy}{(y_2'-y_1')\,g(y_A)}=\frac{\sqrt[4]{y_A-t}}{y_2'-y_1'}\,e^{-i\frac{2}{3}(y_A-t)^{3/2}}\int\limits_{y_1'}^{y_2'}\frac{e^{i\frac{2}{3}(y-t)^{3/2}}}{\sqrt[4]{y-t}}\,dy.$$

Подстановкой

$$\tau=\sqrt{\frac{2}{3}}\,(y-t)^{3/4}$$

это выражение приводится к

$$L=\frac{2\sqrt{\frac{2}{3}}\sqrt[4]{y_A-t}\;e^{i\frac{2}{3}(y_A-t)^{3/2}}}{y_2'-y_1'}\int\limits_{\tau_1}^{\tau_2}e^{i\tau^2}d\tau,$$

где

$$\tau_{1,2}=\sqrt{\frac{2}{3}}\,(y_{1,2}'-t)^{3/4}.$$

При $|x|\gg 1$ интеграл

$$\int\limits_x^\infty e^{i\xi^2}d\xi$$

имеет асимптотическое разложение

$$\int\limits_x^\infty e^{i\xi^2}d\xi\simeq-\frac{1}{2i}\,\frac{e^{ix^2}}{x}+\frac{1}{4}\,\frac{e^{ix^2}}{x^3}+\ldots.$$

Поэтому при $|\tau_{1,2}|\gg 1$

$$L\simeq\frac{\sqrt[4]{y_A-t}}{i(y_2'-y_1')}\,e^{-i\frac{2}{3}(y_A-t)^{3/2}}\left[\frac{e^{i\frac{2}{3}(y_2'-t)^{3/2}}}{(y_2'-t)^{3/4}}-\frac{e^{i\frac{2}{3}(y_1'-t)^{3/2}}}{(y_1'-t)^{3/4}}\right].$$

Так как

$$y_{1,2}=y_A\mp\frac{y_2'-y_1'}{2},$$

то, предполагая $y_A\gg(y_2'-y_1')/2$ (что соответствует неравенству (33)), получим

$$\frac{2}{3}(y_{1,2}-t)^{3/2}\simeq\frac{2}{3}(y_A-t)^{3/2}\mp\frac{y_2'-y_1'}{2}\sqrt{y_A-t}$$

Поэтому

$$L\simeq\frac{\sin\left[\frac{(y_2'-y_1')\sqrt{y_A-t}}{2}\right]}{\frac{(y_2'-y_1')\sqrt{y_A-t}}{2}}.$$

Если еще положить $y_A\gg t$, что соответствует неравенству (34), то можно получить

$$L\simeq\frac{\sin\frac{(y_2'-y_1')\sqrt{y_A}}{2}}{\frac{(y_2'-y_1')\sqrt{y_A}}{2}}+\frac{t}{y_A}\left[\frac{\sin\frac{(y_2'-y_1')\sqrt{y_A}}{2}}{y_2'-y_1'}-\frac{1}{2}\cos\frac{(y_2'-y_1')\sqrt{y_A}}{2}\right].$$

Отбросив второе слагаемое в этой формуле, получим нужную нам формулу (32). В частности, при $(y_2'-y_1')\sqrt{y_A}=2\pi$ получим в соответствии с (38)

$$L\simeq\frac{1}{2}\,\frac{t}{y_A}.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Л. А. Вайнштейн, Электромагнитные волны, Изд. Советское радио, 1957.
2. В. А. Фок, Изв. АН СССР, Сер. физ., 1950, 14, 1, 70.
3. Б. А. Введенский, А. Г. Аренберг, Вопросы распространения ультракоротких волн, ч. I, Изд. Советское радио, 1948.
4. П. А. Азрилянт, М. Г. Белкина, Численные результаты теории дифракции радиоволн вокруг земной поверхности, Изд. Советское радио, 1957.
5. G. N. Watson, Proc. Roy. Soc. A, 1918, 95.
6. Б. А. Введенский, J. Techn. Phys. (USSR), 1935, 2, 624—639; ЖТФ, 1936, 6, 163; ЖТФ, 1937, 7, 1647.
7. H. B. Bremmer, Terrestrial radiowaves, theory of propagation, Elsivier Publish. Company, N. Y., Amsterdam, London, Brussel, 1949.
8. В. А. Фок, Таблицы функций Эйри, 1946.
9. Распространение ультракоротких радиоволн, перев. с англ. под ред. Б. А. Шиллерова, Изд. Советское радио, 1954.
10. Л. М. Бреховских, Волны в слоистых средах, Изд. АН СССР, 1957.
11. В. Н. Фадеева, Н. М. Терентьев, Таблицы значений интеграла вероятностей от комплексного аргумента, ГИТТЛ, 1954.
12. К. А. Карпов, Таблицы функции $w(z) = e^{-z^2}\int_0^z e^{x^2dx}$ в комплексной плоскости, Изд. АН СССР, 1954.
13. К. А. Карпов, Таблицы функции $F(z) = \int_0^z e^{x^2}dx$ в комплексной плоскости, Изд. АН СССР, 1958.

Поступила в редакцию
23 VIII 1960

ИССЛЕДОВАНИЕ ПРОСТРАНСТВЕННО-ВРЕМЕННЫХ КОРРЕЛЯЦИОННЫХ СВЯЗЕЙ УРОВНЯ ПОЛЯ САНТИМЕТРОВЫХ ВОЛН ПРИ РАСПРОСТРАНЕНИИ В ТУРБУЛЕНТНОЙ АТМОСФЕРЕ

П. Е. Кубасов

Приведены результаты экспериментального исследования пространственно-временны́х корреляционных характеристик флуктуаций поля волн длиной 3 *см* на приземной трассе в зоне прямой видимости. По результатам измерений флуктуаций поля в двух точках с переменной базой, проведенных в июне — декабре 1959 г., определены нормированные пространственные и временны́е корреляционные функции флуктуаций уровня поля, приведен их анализ, получены оценки радиусов корреляции.

ВВЕДЕНИЕ

Как известно, уровень радиосигнала на УКВ, распространяющегося в среде со случайными неоднородностями, не остается постоянным как во времени, так и в пространстве.

Важными характеристиками, описывающими статистические свойства подобного сигнала, являются пространственная

$$f(P_1, P_2, t) = \overline{\Delta E(P_1, t)\,\Delta E(P_2, t)} = \overline{[E(P_1, t) - \overline{E(P_1, t)}]} \times \overline{[E(P_2, t) - \overline{E(P_2, t)}]} \quad (1)$$

и временна́я

$$f_1(P, t, \tau) = \overline{\Delta E(P, t)\,\Delta E(P, t+\tau)} = \overline{[E(P, t) - \overline{E(P, t)}]} \times \overline{[E(P, t+\tau) - \overline{E(P, t+\tau)}]} \quad (2)$$

корреляционные функции, где $E(P_1, t)$, $E(P_2, t)$ — амплитуды поля в точках P_1 и P_2 рассматриваемой области пространства в момент времени t (черта сверху всюду означает статистическое усреднение).

Если рассматриваемый флуктуационный процесс стационарен во времени и однороден в пространстве, то

$$f(P_1, P_2, t) = f(P_1, P_2), \quad f_1(P, t, \tau) = f_1(\tau).$$

Производя в (1) и (2) нормировку значениями

$$\sigma^2 = f(P_1, P_2)_{P_1=P_2} \text{ и } \sigma_1^2 = f_1(\tau)_{\tau=0},$$

получим выражения пространственного и временно́го коэффициентов корреляции флуктуаций амплитуды поля

$$\rho_E(\vec{l}) = \frac{f(P_1, P_2)}{\sigma^2}, \quad (3)$$

$$\rho_E(\tau) = \frac{f_1(\tau)}{\sigma_1^2}, \quad (4)$$

где $\vec{l}$ — вектор, соединяющий точки P_1 и P_2 рассматриваемой области пространства; τ — временно́й сдвиг.

Пространственная и временна́я корреляции флуктуаций амплитуды поля, определяемые равенствами (3) и (4), как известно, зависят от ха

рактера корреляционных связей флуктуаций показателя преломления среды. Если флуктуации показателя преломления n среды могут быть описаны корреляционной функцией

$$f_n(\vec{r}) = \overline{\Delta n^2} \exp(-r^2/a^2), \tag{5}$$

где $\overline{\Delta n^2} = \overline{(n - \bar{n})^2}$; a — масштаб неоднородностей, то [1]

$$\rho_E(\vec{l}) = \frac{e^{-l^2/a^2} - \frac{1}{2iD}[E_i(\varepsilon_2) - E_i(\varepsilon_1)]}{1 - \frac{1}{D}\operatorname{arc\,tg} D}. \tag{6}$$

Здесь E_i — интегральная показательная функция; $\varepsilon_1 = \frac{il^2/a^2}{D - i}$;

$$\varepsilon_2 = -\frac{il^2/a^2}{D + i};\ D = 4L/ka^2;\ k = 2\pi/\lambda;\ L \text{ — длина трассы.}$$

Допустим, что флуктуации уровня сигнала обусловлены исключительно переносом неоднородностей (т. е. предположим, что влиянием других причин на флуктуации поля, таких, как теплопроводность, диффузия, турбулентность, можно пренебречь). При этом оказывается, что задачу о корреляции во времени можно свести к исследованию пространственных корреляционных свойств флуктуаций амплитуды поля [1]. Так, если пространственная корреляция $\rho_E(l)$ описывается формулой вида (6), то временну́ю корреляцию флуктуаций амплитуды поля $\rho_E(\tau)$ можно представить в виде

$$\rho_E(\tau) = \frac{e^{-\frac{v_\perp^2\tau^2}{a^2}} - \frac{1}{2iD}[E_i(\varepsilon_2) - E_i(\varepsilon_1)]}{1 - \frac{1}{D}\operatorname{arctg} D}. \tag{7}$$

Последнее выражение может быть получено из (6) заменой величины l на

$$l_\perp = v_\perp \tau, \tag{8}$$

где $v_\perp$ — поперечная составляющая скорости переноса. При $D \gg 1$ выражение для $\rho_E(\tau)$ упрощается и принимает вид

$$\rho_E(\tau) \simeq e^{-\frac{v_\perp^2\tau^2}{a^2}}. \tag{7'}$$

Вводя определение временно́го интервала корреляции

$$\tau_0 = \frac{a}{v_\perp}, \tag{9}$$

имеем

$$\rho_E(\tau) = e^{-\frac{\tau}{\tau_0}}. \tag{7''}$$

Из (9) следует, что интервал корреляции τ_0 зависит от поперечной составляющей скорости переноса неоднородностей.

Анализ формулы (6) показывает [1], что корреляция при поперечном разнесении антенн простирается на расстояние порядка радиуса корреляции показателя преломления среды для всех трех областей значений волнового параметра D.

1. ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНАЯ УСТАНОВКА

Описываемые экспериментальные исследования проводились на трассе протяженностью 36 *км*, пролегающей над среднепересеченной местностью. Передатчик мощностью 65 *квт* в импульсе с частотой повторения 577 *имп/сек* и длительностью импульса 1 *мксек* работал на несущей частоте 9370 *Мгц*. В качестве излучающей системы использовалась пара-

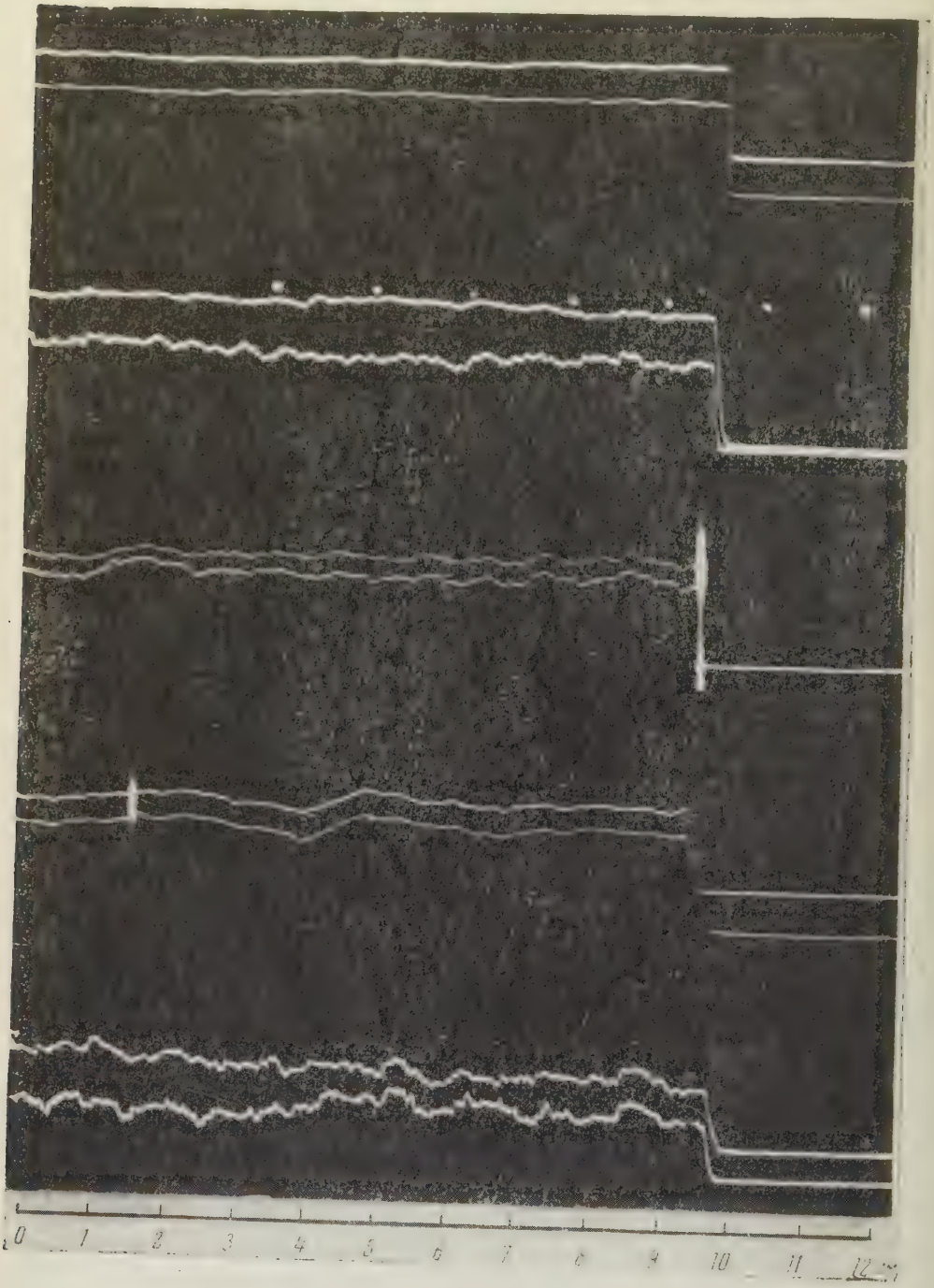


Рис. 1. Образцы записи вариаций уровня поля

болическая антенна диаметром 0,7 *м* с симметричным раскрывом главного лепестка диаграммы направленности по точкам половинной мощности $\sim 3°$. Поляризация излучаемых волн горизонтальная. Высота расположения передающей антенны над земной поверхностью ~ 40 *м*.

Приемные антенны представляли собой пирамидальные рупоры с диаграммой направленности $\sim 15°$ в *H*-плоскости и $\sim 18°$ в *E*-плоскости. В ряде случаев в качестве приемных антенн использовались прямоугольные волноводные секции. Антенное устройство было выполнено таким образом, что позволяло изменять базу разноса приемных элементов в пределах 4—200 *см* и обеспечивало их ориентировку и фиксацию в пространстве. Высота расположения антенн на приемном пункте ~ 4 *м* над земной поверхностью.

На приемном конце трассы исследованию подвергались флуктуации амплитуды сигнала. Прием осуществлялся на два приемника супергетеродинного типа с полосой пропускания 4 *Мгц* и чувствительностью 70 *дбм*. Амплитудная характеристика приемников — линейная по мощности. Для проверки стабильности параметров приемной системы она периодически градуировалась при помощи генератора стандартных сигналов.

Огибающая амплитуды принятого сигнала с выхода приемников при помощи осциллографа МПО-2 записывалась на кинопленку. Скорость продвижения пленки, в зависимости от характера флуктуаций, выбиралась равной 2 или 4 *мм/сек*. Образцы записи сигналов приведены на рис. 1. Полученные осциллограммы подвергались статистической обработке. Сигнал на выходе приемников контролировался при помощи электронно-лучевого осциллографа.

3. РЕЗУЛЬТАТЫ ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ И АНАЛИЗ ПРОСТРАНСТВЕННЫХ И ВРЕМЕННЫХ КОРРЕЛЯЦИОННЫХ КРИВЫХ

Огибающие уровней сигналов с выхода обоих приемников записывались одновременно на общую пленку Время записи для каждой базы разноса выбиралось в пределах 3—4 *мин*. Для подсчета коэффициентов корреляции на каждом участке пленки, соответствующем определенной базе разноса, выбиралось по 180—240 пар точек, взятых через интервал $\tau = 1$ *сек*. Для каждого сеанса по экспериментальным корреляционным кривым определялись радиусы пространственной (l_0) и временной (τ_0) корреляции, взятые по уровню $\rho_E(l) = \rho_E(\tau) = 0{,}5$.

а) Анализ пространственных корреляционных кривых. Результаты статистической обработки 20 сеансов измерения пространственной корреляции при горизонтальном разнесении антенн поперек трассы приведены в табл. 1 и на сводном графике рис. 2.

Таблица 1

Сеансы	l_0, *м*	Сеансы	l_0, *м*	Сеансы	l_0, *м*
29 VI 1959		16 IX 1959		11 XI 1959	
17^{10}—17^{50}	0,2	15^{50}—16^{50}	0,75	16^{00}—17^{00}	0,8
30 VI 1959		17 IX 1959		13 XI 1959	
10^{30}—11^{20}	0,3	9^{20}—1^{20}	0,5	16^{05}—17^{05}	0,2
1 VII 1959		17 IX 1959		12 XII 1959	
14^{10}—15^{20}	0,4	13^{15}—13^{50}	0,2	20^{30}—21^{20}	0,8
1 VII 1959		27 X 1959		13 XII 1959	
17^{00}—17^{50}	0,2	15^{30}—16^{30}	0,2	5^{45}—6^{35}	0,35
2 VII 1959		30 X 1959		13 XII 1959	
10^{00}—10^{50}	0,4	10^{00}—11^{00}	0,6	23^{00}—23^{35}	0,6
2 VII 1959		30 X 1959		13—14 XII 1959	
17^{00}—17^{50}	0,2	12^{00}—13^{00}	0,5	23^{40}—0^{30}	0,5
16 IX 1959		30 X 1959			
12^{00}—13^{00}	0,7	15^{00}—16^{00}	—	—	—

Трудно указать какую-либо определенную форму функции корре ляции для удовлетворительной аппроксимации экспериментальных дан ных отдельного сеанса: разброс экспериментальных точек значителен Некоторое представление об общей форме пространственных корреля ционных связей можно получить из рассмотрения сводного графика

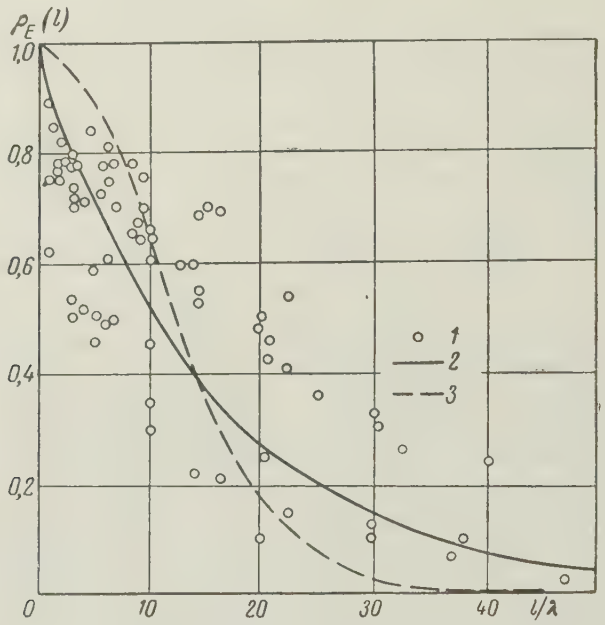


Рис. 2. Пространственная корреляция при поперечном разнесении приемных антенн:

1 — экспериментальные данные; *2* — теоретическая кривая $\rho_E(l) = \exp(-l/a)$; *3* — теоретическая кривая, $\rho_E(l) = \exp(-l^2/a^2)$

рис. 2, на котором кружками обозначены экспериментальные точки, сплошная кривая изображает экспоненту, а пунктирная — гауссоиду. При построении точек обеих кривых за величину a принято среднее значение радиуса пространственной корреляции l_0, взятое из экспериментальных данных. Из рис. 2 видно, что общий ход распределения экспериментальных точек ближе к экспоненциальной кривой, чем к гауссоиде. Результаты измерений, приведенные в табл. 1 и на рис. 2, показывают, что значения радиуса корреляции при горизонтальном разнесении антенн поперек трассы находятся в пределах 0,2—0,8 *м*, т. е. корреляция, как правило, исчезает на расстоянии 7—25 длин волн, что подтверждает предположение, высказанное в работе [2]. Усреднение по 20 сеансам измерений дает для величины радиуса поперечной корреляции значение $\overline{l_0} = 0{,}5$ *м*.

Поскольку экспериментальные данные о пространственной корреляции флуктуаций амплитуды радиосигнала на УКВ при распространении в условиях прямой видимости, опубликованные до сих пор, крайне скудны (кроме упоминавшейся уже работы [2] нам известна лишь одна работа [8], в которой приведены результаты эксперимента на волне $\lambda = 7$ *м*; получены значения $\rho_{3\lambda} = 0{,}97$ и $\rho_{27\lambda} = 0{,}4$), представляет известный интерес сравнить эти данные с результатами, полученными при исследованиях распространения УКВ за пределами горизонта. Подобные сведения приведены , в частности, в работах [3, 4, 7], из кото

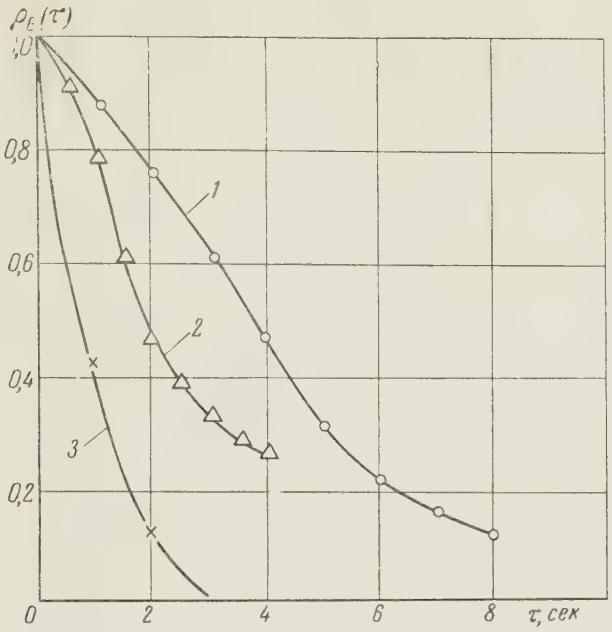


Рис. 3. Зависимость быстроты спада временны́х корреляционных кривых от поперечной составляющей скорости ветра:

1 — $v_\perp = 0{,}9$ *м/сек*; *2* — $v_\perp = 1{,}9$ *м/сек*; *3* — $v_\perp = 4{,}3$ *м/сек*

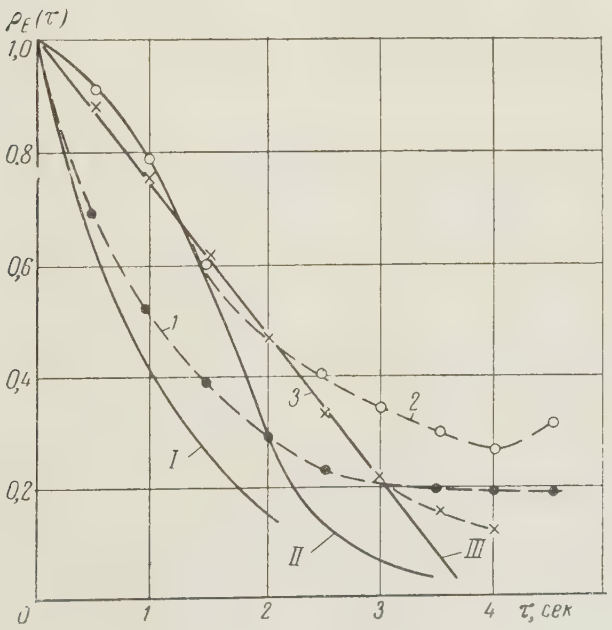


Рис. 4. Основные типы временны́х корреляционных кривых

экспериментальные кривые: *1* — первый тип (29 VI 1959, 17^{10} — 17^{50}); *2* — второй тип (30 VI 1959, 10^{30} — 11^{20}); *3* — третий тип (3 VII 1959, 10^{00} — 10^{50}); теоретические кривые: $I - \rho_E(\tau) = \exp(-\tau/\tau_0)$ ($\tau_0 = 1{,}1$ *сек*); $II - \rho_E(\tau) = \exp(-\tau^2/\tau_0^2)$ ($\tau_0 = 1{,}8$ *сек*); *III* — прямая

рых следует, что поперечная корреляция за пределами горизонта исче зает на расстояниях порядка 10—35 длин волн. Подобное сопоставлени позволяет, по-видимому, считать, что средние значения поперечног радиуса корреляции при распространении УКВ в условиях прямой видимости и за пределами горизонта, выраженные в длинах волн, явля ются величинами одного порядка.

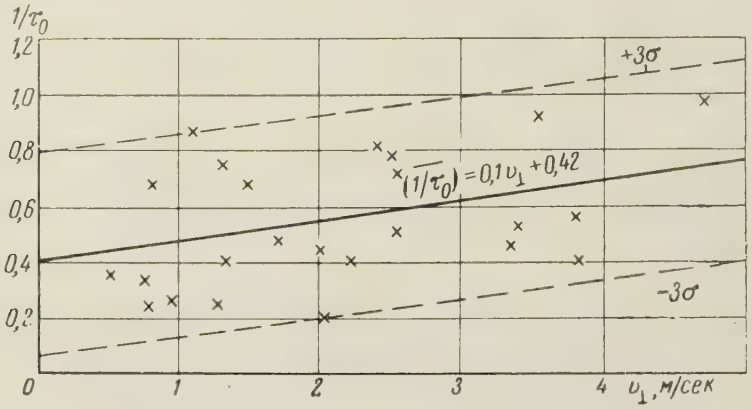


Рис. 5. Зависимость между поперечной составляющей скорости ветра и величиной, обратной радиусу временно́й корреляции

б) Анализ временны́х корреляционных кри вых. Результаты статистической обработки и расчетов по 26 сеансам измерений временно́й корреляции приведены в табл. 2 и на графика рис. 3—5. Анализ хода временны́х корреляционных кривых показа следующее.

Таблица 2

Сеансы	$v_\perp$, м/сек	τ_0, сек	$l_\perp$, м	Сеансы	$v_\perp$, м/сек	τ_0, сек	$l_\perp$, м
29 VI 1959				17 IX 1959			
17^{10}—17^{5}_{0}	2,5	1,3	3,2	9^{20}—10^{20}	3,8	1,75	6,6
30 VI $19_{2}59$				17 IX 1959			
10^{30}—11^{0}	1,9	1,9	3,6	12^{20}—13^{00}	2,9	1,9	5,5
1 VII $1^{9}59$				17 IX 1959			
14^{10}—15^{20}	4,3	0,8	3,4	13^{15}—13^{50}	2,5	2,0	5,0
1VII 1959				27 X 1959			
17^{00}—17^{50}	3,5	1,1	3,8	15^{20}—16^{30}	1,7	2,1	3,5
2VII 1959				30 X 1959			
10^{00}—10^{50}	4,7	1,0	4,7	10^{00}—11^{00}	1,3	1,4	1,8
2VII 1959				30 X 1959			
17^{00}—17^{50}	3,0	1,0	3,0	12^{00}—13^{00}	1,1	1,2	1,3
3 VII 1959				11 XI 1959			
10^{00}—17^{50}	0,9	3,8	3,4	16^{00}—17^{00}	0,5	2,9	1,5
3 VII 1959				12 XI 1959			
14^{30}—15^{20}	1,2	4,0	4,8	16^{00}—17^{00}	0,8	4,5	3,6
3 VII 1959				13 XI 1959			
17^{00}—17^{50}	0,9	6,0	5,4	16^{05}—17^{05}	0,75	3,0	2,2
8 VII 1959				12 XII 1959			
14^{30}—15^{20}	1,3	2,5	3,2	20^{30}—21^{20}	0,8	1,5	1,2
10 IX 1959				13 XII 1959			
10^{00}—1^{00}	2,2	2,5	5,5	5^{45}—6^{35}	1,1	0,7	0,8
16 IX 1959				13 XII 1959			
12^{00}—13^{00}	2,9	2,2	3,7	23^{00}—23^{35}	2,4	1,0	2,4
16 IX 1959				13—14 XII 1959			
15^{50}—16^{50}	2,0	2,5	5,0	23^{40}—0^{30}	2,4	0,8	1,9

1. Явно выраженную зависимость быстроты спада кривых от вели-ины поперечной составляющей скорости ветра $v_\perp$: быстрота спада уве-ичивается при возрастании скорости ветра. Примеры временны́х кор-еляционных кривых при различных значениях поперечной составляю-щей скорости ветра приведены на рис. 3.

2. Три основных типа корреляционных кривых; ход первого типа ривых, в пределах значений коэффициента корреляции от 1,0 до 0,5, удовлетворительно аппроксимируется экспонентой, ход второго типа — гауссоидой, третьего типа — прямой линией (в тех же пределах). При-еры, иллюстрирующие указанные типы кривых, представлены на рис. 4. Приведенные на этом же графике теоретические кривые построены при начениях временно́го радиуса корреляции τ_0, взятых из эксперимен-альных кривых соответствующих сеансов по уровню $\rho_E(\tau) = 0{,}5$. Боль-инство экспериментальных кривых (17 сеансов) приближается к первому ипу, 4 кривых — ко второму и 5 кривых — к третьему типу.

Как отмечено выше, предположение о том, что флуктуации уровня игнала обусловлены только переносом неоднородностей, позволяет вести задачу о корреляции во времени к задаче о корреляции в про-транстве (согласно формуле (8)). Результаты вычислений величин $l_\perp$ ля значений τ, равных радиусу временно́й корреляции по уровню $_E(\tau) = 0{,}5$, приведены в табл. 2 и на графике рис. 5. Последний пред-тавляет собой зависимость между значениями $v_\perp$ и соответствующими начениями величины $1/\tau_0$. Звездочками обозначены экспериментальные очки. Прямая

$$\left(\frac{\overline{1}}{\tau_0}\right) = 0{,}1\, v_\perp + 0{,}42,$$

вляющаяся линией регрессии величины $1/\tau_0$ на $v_\perp$, построена по мето-у наименьших квадратов [5]; две прямые, параллельные линии регрес-ии, определяют границы разброса величин $1/\tau_0$, равные утроенной дис-ерсии ($\pm 3\sigma$).

Из анализа табл. 2 и рис. 5 следует:

1. Несмотря на значительный разброс точек, являющийся в значи-ельной степени следствием малой точности измерения ветровых данных, бнаруживается корреляционная связь между величинами $v_\perp$ и $1/\tau_0$. На аличие такой связи указывают также приведенные на рис. 4 графики ависимости хода временны́х корреляционных кривых от поперечной оставляющей скорости ветра.

2. Размеры величин $l_\perp$, вычисленные на основании (8) по уровню $_E(\tau) = 0{,}5$, имеют близкие значения порядка нескольких метров. среднение по всем 26 сеансам дает величину

$$\overline{l}_\perp = 4\ м.$$

3. Обнаруживаются значительные сезонные изменения величин $l_\perp$. ак, если среднее значение $\overline{l}_\perp$ за июнь — сентябрь имеет порядок 4,6 *м*, о в осенне-зимний период оно равно 2 *м*.

4. Линия регрессии не проходит через начало координат, как сле-овало бы ожидать на основе принятого нами предположения о причине озникновения флуктуаций сигнала. Подобное расхождение можно ка-ественно объяснить, если учесть, что при определении величин $l_\perp$ по ормуле (8) нами учитывалась только горизонтальная часть поперечной оставляющей скорости ветра и не принимался во внимание вертикаль-ый перенос воздушных масс в результате конвекции. Кроме того, опре-еленный вклад в создание флуктуаций сигнала может внести и про-ольная составляющая скорости ветра [6], а также хаотическое движе-ие самих неоднородностей.

в) Сопоставление пространственных корреляционных кривых с временными. При сравнении величин l_0, полученных из пространственных корреляционных кривых, с соответствующими значениями l_t, вычисленными на основании (8) из временных кривых по уровню $\rho_E(\tau) = 0{,}5$, обнаруживается существенное различие между ними: последние оказываются в 8—10 раз больше первых. Возможными причинами подобного разногласия могут оказаться следующие.

1. Влияние многолучевой картины поля при пространственно-разнесенном приеме.

Как отмечается в работах [9—12], наличие поверхности раздела, приводящее к интерференционной картине поля, может повлечь за собой существенное отличие получаемых в этих условиях экспериментальных флуктуационных характеристик радиосигнала от соответствующих значений этих величин, рассчитанных для безграничной среды.

Характер трассы, использованной для эксперимента, результаты которого мы излагаем, позволяет предполагать, что на большем ее протяжении отражение было незначительным, за исключением участка местности, непосредственно прилегающего к приемному пункту.

Основываясь на опубликованных данных и учитывая, что значения поперечных радиусов корреляции определены из экспериментального измерения фазы на волне $\lambda = 10$ *см* [9, 10], можно считать, что величины радиусов поперечной корреляции флуктуаций амплитуды ($l_0 \ll \sqrt{\lambda L}$), полученные нами для волны $\lambda = 3$ *см*, удовлетворительно согласуются с результатами предшествующих исследований. Отметим, что ярко выраженной интерференционной картины поля в нашем эксперименте не наблюдалось: относительные дисперсии при перемещении подвижной антенны в пределах максимальной базы разноса изменялись не более чем в 1,5 раза.

2. Неучет хаотического движения самих неоднородностей; при этом движении скорость затухания корреляционных связей может увеличиться.

В заключение пользуюсь приятной возможностью выразить искреннюю признательность А. А. Семенову, Г. А. Карпееву за ценные советы и помощь в выполнении работы, а также всему коллективу кафедры распространения электромагнитных волн за помощь, оказанную при выполнении эксперимента и обработке результатов измерений.

ЛИТЕРАТУРА

1. Л. А. Чернов, Распространение волн в среде со случайными неоднородностями, Изд. АН СССР, 1958.
2. А. А. Семенов, Г. А. Карпеев, Вестн. Моск. ун-та, 1957, 6, 69.
3. H. Staras, Proc. I. R. E., 1955, 43, 10, 1374.
4. J. Kurihara, Proc. I. R. E., 1955, 43, 10, 1362.
5. А. М. Длин, Математическая статистика в технике, Изд. Советская наука, 1958.
6. A. D. Wheelon, J. Atmos. and. Terr. Phys., 1959, 15, 3/4, 185.
7. J. H. Chisholm, P. A. Portman, J. T. de Bettencourt, J. Roche, Proc. I. R. E., 1955, 43, 10, 1317.
8. В. А. Красильников, Изв. АН СССР, Сер. геогр. и геофиз., 1949, 13, 1, 33.
9. А. В. Мень, В. И. Горбач, С. Я. Брауде, Изв. вузов МВО СССР (Радиофизика), 1959, 2, 3, 388.
10. А. В. Мень, С. Я. Брауде, В. И. Горбач, Докл. АН СССР, 1959, 125, 5, 1019.
11. Э. А. Канер, Ф. Г. Басс, Изв. вузов МВО СССР (Радиофизика), 1959, 2, 4, 553.
12. Ф. Г. Басс, Э. А. Канер, Изв. вузов МВО СССР (Радиофизика), 1959, 2, 4, 565.

Физический факультет
Московского государственного университета
им. М. В. Ломоносова

Поступила в редакцию
6 V 1960

РАДИОТЕХНИКА И ЭЛЕКТРОНИКА

1961 № 8

СТАТИСТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ ОПТИМАЛЬНОГО РАЗРЕШЕНИЯ

Я. Д. Ширман

Исследованы возможности разрешения первичных и вторичных излучателей радиоволн при наличии помехи в виде теплового радиоизлучения. Предполагается, что разрешение осуществляется на основе данных о распределении поля во времени на отрезке прямой, причем размер отрезка велик по сравнению с максимальной длиной волны излучаемых колебаний. Находятся коэффициент использования энергии и закон оптимальной обработки при разрешении. Приведены примеры приложения результатов анализа к случаю углового разрешения.

ВВЕДЕНИЕ

Работу ряда радиотехнических устройств можно свести к обнаружению первичных или вторичных излучателей радиоволн. Будем считать, что два подлежащих обнаружению объекта разрешаются, если наличие одного из этих объектов существенно не ухудшает возможности обнаружить второй объект. Одной из причин, мешающих принятию правильного решения о распределении излучающих объектов, является наличие теплового излучения, которое ограничивает возможности обнаружения и разрешения объектов даже при практически нешумящем приемнике. В силу случайного характера мешающих колебаний и отдельных параметров разрешаемых сигналов (например, амплитуды и фазы) задачи обнаружения и разрешения являются статистическими, а работа устройств оптимального обнаружения и разрешения сводится к анализу распределения составляющих поля в различных точках раскрыва антенны как функций времени.

Таким образом, не только приемник, но и антенна рассматривается как элемент вычислительного устройства, решающего задачу о наиболее вероятном распределении излучателей. Эта точка зрения иллюстрируется ниже простейшим примером. Предполагается, что разрешение осуществляется путем анализа составляющих поля как функций времени в пределах неподвижного отрезка прямой $-l/2 < x < l/2$. Каждая из составляющих поля образуется в результате наложения дельта-коррелированного теплового излучения и излучения разрешаемых объектов (влияние внутренних шумов приемника можно учесть как соответствующее увеличение температуры теплового излучения). Размер l предполагается достаточно большим по сравнению с максимальной длиной волны излучаемых колебаний и малым по сравнению с расстоянием до излучателей.

1. ДИСКРЕТИЗАЦИЯ КОЛЕБАНИЙ НА РАСКРЫВЕ

Поскольку каждая из анализируемых составляющих поля является не только функцией времени t, как в известной теории оптимального приема, но и координаты x точек раскрыва, наряду с обычной дискретизацией по времени или частотному спектру, целесообразно провести дискретизацию по координате x или ее спектру. Ниже приведена дискретизация по частоте f спектра функции времени и координате x точек раскрыва.

Полагая, что любая из анализируемых высокочастотных функций $u(t, x)$ задана лишь для ограниченного интервала времени T, опишем ее

на этом интервале суммой гармоник ряда Фурье:

$$u(t, x) = \sum_m u_m(t, x) = \sum_m [a_m(x) \cos 2\pi f_m t + b_m(x) \sin 2\pi f_m t], \quad (1)$$

соответствующих дискретным частотам

$$f_m = \frac{m}{T} (m = m_1, m_1 + 1, \ldots, m_2). \quad (2)$$

Если распределение $u(t, x)$ создается системой s дискретных излучателей, настолько удаленных, что создаваемые ими волны являются плоскими в пределах раскрыва, то для каждой из гармоник поля $u_m(t, x)$ можно написать

$$u_m(t, x) = \sum_{i=1}^{s} u_{mi}(t, x) = \sum_{i=1}^{s} u_{mi}\left(t - \frac{x}{c} \cos \alpha_i, 0\right) =$$

$$\sum_{i=1}^{s} \left[a_{mi}(0) \cos 2\pi \left(f_m t - \frac{f_m \cos \alpha_i}{c} x\right) + b_{mi}(0) \sin 2\pi \left(f_m t - \frac{f_m \cos \alpha_i}{c} x\right)\right]. \quad (3)$$

Здесь индекс i характеризует i-й излучатель; c — скорость света; α_i — угол между направлением прихода волны от i-го излучателя и положительным направлением оси x.

Сопоставляя (1) и (3), можно получить

$$a_m(x) = \sum_{i=1}^{s} \left[a_{mi}(0) \cos 2\pi \frac{f_m \cos \alpha_i}{c} x - b_{mi}(0) \sin 2\pi \frac{f_m \cos \alpha_i}{c} x\right],$$

$$b_m(x) = \sum_{i=1}^{s} \left[a_{mi}(0) \sin 2\pi \frac{f_m \cos \alpha_i}{c} x + b_{mi}(0) \sin 2\pi \frac{f_m \cos \alpha_i}{c} x\right]. \quad (4)$$

Выражения (4) можно рассматривать как спектральные разложения функций $a_m(x)$ и $b_m(x)$ координаты x. Как следует из приведенных выражений, спектр частот по координате x является дискретным и содержит частоты $f_m \cos \alpha_i / c$. Ни одна из частот спектра не превосходит f_m / c. Последний вывод остается в силе, если перейти к непрерывному распределению части излучателей по углам α, как это имеет место при тепловом излучении, и учесть тем самым сплошную составляющую спектра наряду с дискретной.

Из приведенного анализа следует, что функции $a_m(x)$ и $b_m(x)$, входящие в выражение (1), имеют ограниченный спектр частот по координате x в пределах от 0 до f_m/c. К таким функциям применима теорема Котельникова, т. е.

$$a_m(x) = \sum_n a_m(x_{mn}) \frac{\sin 2\pi \frac{f_m}{c}(x - x_{mn})}{2\pi \frac{f_m}{c}(x - x_{mn})},$$

$$b_m(x) = \sum_n b_m(x_{mn}) \frac{\sin 2\pi \frac{f_m}{c}(x - x_{mn})}{2\pi \frac{f_m}{c}(x - x_{mn})}. \quad (5)$$

Здесь x_{mn} — координаты точек в пределах всей оси x:

$$x_{mn} = \frac{n}{2} \frac{c}{f_m}. \quad (6)$$

Соотношения (5) указывают на возможность пространственной дискретизации коэффициентов произвольной m-й гармоники. Точки дискрети-

зации x_{mn} располагаются с интервалом $c/2f_m = \lambda_m/2$, где λ_m — длина волны, соответствующая m-й гармонике. Если интервал дискретизации мал по сравнению с размером l раскрыва, для описания поля в его пределах можно пренебречь краевыми эффектами и ограничиться только теми членами ряда, для которых точки дискретизации расположены в пределах раскрыва.

Объединяя (1) и (5), получим

$$u(t, x) = \sum_{m,n} [a_{mn} \cos 2\pi f_m t + b_{mn} \sin 2\pi f_m t] \frac{\sin 2\pi \frac{f_m}{c}(x - x_{mn})}{2\pi \frac{f_m}{c}(x - x_{mn})}, \quad (7)$$

где

$$a_{mn} = a_m(x_{mn}); \quad b_{mn} = b_m(x_{mn}). \quad (8)$$

2. ЗАКОН РАСПРЕДЕЛЕНИЯ РЕАЛИЗАЦИЙ СОСТАВЛЯЮЩИХ ПОЛЯ ТЕПЛОВОГО ИЗЛУЧЕНИЯ ПО ВРЕМЕНИ И НА РАСКРЫВЕ АНТЕННЫ

Вероятности различных реализаций $u(t, x)$ составляющих поля теплового излучения можно описать законом совместного распределения коэффициентов a_{mn} и b_{mn}, каждый из которых является гауссовой случайной величиной со средним значением, равным нулю. Этот закон полностью характеризуется заданием дисперсий $\overline{a_{mn}^2}$, $\overline{b_{mn}^2}$ и смешанных вторых моментов распределения (ковариаций) $\overline{a_{mn}\, a_{\mu\nu}}$, $\overline{b_{mn}\, b_{\mu\nu}}$, $\overline{a_{mn} b_{\mu\nu}}$ (черта используется как знак усреднения, m, n и μ, ν — целые числа).

Считая спектральную плотность теплового излучения постоянной в рабочем диапазоне частот $N_0(f) = N_0$ и учитывая интервал $\Delta f_m = 1/T$ между гармониками спектра, полагаем $0{,}5\,(\overline{a_{mn}^2} + \overline{b_{mn}^2}) = N_0(f_m)\,\Delta f_m$, откуда

$$\overline{a_{mn}^2} = \overline{b_{mn}^2} = \overline{a_m^2(x_{mn})} = \overline{b_m^2(x_{mn})} = \frac{N_0}{T}. \quad (9)$$

Поскольку тепловое излучение можно считать некоррелированным по спектру, ковариации с различными номерами гармоник $\mu \neq m$ тождественно равны нулю. Для оценки ковариаций с номерами гармоник $\mu = m$ и индексами дискретизации n и ν воспользуемся формулами (4). Разбивая предварительно всю сферу на малые телесные углы $\Delta\Omega_i = \sin\alpha_i \Delta\alpha_i \Delta\beta_i$ (α, β — сферические координаты) и полагая тепловое излучение равномерно распределенным по телесным углам в пределах всего пространства, введем эквивалентные дискретные излучатели с параметрами поля в центре раскрыва

$$\overline{a_{mi}^2(0)} = \overline{b_{mi}^2(0)} = \frac{N_0}{T}\frac{\Delta\Omega_i}{4\pi} = \frac{N_0}{4\pi T} \sin\alpha_i \Delta\alpha_i \Delta\beta_i. \quad (10)$$

В силу независимого характера излучателей с различными индексами i и j, а также независимости квадратурных составляющих одного и того же излучателя, имеем

$$\overline{a_{mi}(0)\, a_{mj}(0)} = \overline{b_{mi}(0)\, b_{mj}} = \overline{a_{mi}(0)\, b_{mj}(0)} = 0 \text{ при } i \neq j. \quad (11)$$

Вычисляя произведения выражений вида (4) и производя усреднение с учетом соотношений (10), (11), после простейших преобразований получим

$$\overline{a_{mn} a_{m\nu}} = \overline{b_{mn} b_{m\nu}} = \frac{N_0}{4\pi T} \sum_{i=1}^{s} \cos\left[2\pi \frac{f_m \cos\alpha_i}{c}(x_{mn} - x_{m\nu})\right] \sin\alpha_i \Delta\alpha_i \Delta\beta_i.$$

Переходя в пределе к двойному интегралу и вычисляя его значение, найдем

$$\frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi} d\beta \int_0^{\pi} \cos\left[2\pi \frac{f_m \cos\alpha}{c}(x_{mn} - x_{m\nu})\right] \sin\alpha d\alpha = \frac{\sin\left[2\pi \frac{f_m}{c}(x_{mn} - x_{m\nu})\right]}{2\pi \frac{f_m}{c}(x_{mn} - x_{m\nu})}.$$

Используя (6), окончательно получим

$$\overline{a_{mn}a_{m\nu}} = \overline{b_{mn}b_{m\nu}} = \frac{N_0}{T}\frac{\sin\pi(n-\nu)}{\pi(n-\nu)}, \tag{12}$$

откуда следует, что для $n \neq \nu$ значения $\overline{a_{mn}a_{m\nu}}$ и $\overline{b_{mn}b_{m\nu}}$ обращаются в нуль. Аналогично можно убедиться, что $\overline{a_{mn}b_{m\nu}} = 0$ как для $n \neq \nu$, так и для $n = \nu$.

Таким образом устанавливаем, что коэффициенты разложения a_{mn} и b_{mn} составляющих поля теплового излучения представляют собой независимые случайные величины с дисперсией N_0/T и средним значением, равным нулю.

Совместную плотность вероятности совокупности этих величин можно представить в виде

$$p(\ldots, a_{mn}, b_{mn}, \ldots) = \left(\frac{T}{2\pi N_0}\right)^{0{,}5\nu_0} e^{-\frac{1}{N_0}\left[\left(a_{mn}\sqrt{\frac{T}{2}}\right)^2 + \left(b_{mn}\sqrt{\frac{T}{2}}\right)^2\right]}, \tag{13}$$

где ν_0 — общее число независимых коэффициентов ряда.

Условимся рассматривать параметры

$$a_{mn}\sqrt{\frac{T}{2}} \quad \text{и} \quad b_{mn}\sqrt{\frac{T}{2}} \tag{14}$$

произвольной функции $u(t, x)$ как координаты u_k $(k = 1, 2, \ldots)$ некоторого многомерного вектора $\vec{u}$. Определяя скалярное произведение двух многомерных векторов

$$\vec{u}\vec{v} = \sum_k u_k v_k \tag{15}$$

и обозначая $\vec{u}\vec{u} = \vec{u}^2$, выражение (13) после замены переменных более кратко запишем в виде

$$p(\vec{u}) = (\pi N_0)^{-0{,}5\nu_0} e^{-\frac{\vec{u}^2}{N_0}}. \tag{16}$$

Для того чтобы привести выражение (15) к интегральной форме, введем соответствующие спектральные плотности, например

$$g_u(f, x) = \int_{-\infty}^{\infty} u(t, x)\, e^{-j2\pi ft} dt, \tag{17}$$

где функция $u(t, x)$ отлична от нуля лишь для интервала времени T. Как указано в Приложении, при достаточно большом размере раскрыва l по сравнению с максимальной длиной волны $\lambda_{\text{макс}}$ и интервале наблюдения $T \to \infty$ справедливо приближенное соотношение

$$\vec{u}\vec{v} = \frac{4}{c}\,\mathrm{Re}\int_0^{\infty} df \int_{-l/2}^{l/2} f g_u(f, x)\, g_v^*(f, x)\, dx. \tag{18}$$

Оно тем более точно, чем больше раскрыв l по сравнению с $\lambda_{\text{макс}}$ и чем меньше сказываются поэтому краевые эффекты при использовании теоремы Котельникова.

Если спектр сигнала концентрируется вокруг частоты f_0, неосциллирующий множитель $f \simeq f_0 = c/\lambda_0$ можно вынести за знак интеграла. Изменяя порядок и пределы интегрирования, получим

$$\vec{\vec{u}}\,\vec{\vec{v}} = \frac{2}{\lambda_0} \int\limits_{-l/2}^{l/2} dx \int\limits_{-\infty}^{\infty} g_u(f, x)\, g_v^*(f, x)\, df. \tag{19}$$

Используя теорему Парсеваля и переходя к комплексным амплитудам, найдем

$$\vec{\vec{u}}\,\vec{\vec{v}} = \frac{2}{\lambda_0} \int\limits_{-l/2}^{l/2} dx \int\limits_{-\infty}^{\infty} u(t, x)\, v(t, x)\, dt = \frac{1}{\lambda_0} \operatorname{Re} \int\limits_{-l/2}^{l/2} dx \int\limits_{-\infty}^{\infty} \dot{U}(t, x)\, \dot{V}^*(t, x)\, dx. \tag{20}$$

3. СТАТИСТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ ОПТИМАЛЬНОГО РАЗРЕШЕНИЯ

Разрешение можно свести к обнаружению полезного сигнала на фоне тепловых шумов и мешающих сигналов со случайными амплитудами и начальными фазами. Мешающими считают сигналы от соседних объектов, затрудняющие обнаружение. Соответствующая задача решена в работе [1] применительно к функциям времени (а не координаты и времени) для релеевского закона распределения амплитуд и равновероятного закона распределения начальных фаз мешающих сигналов. Поскольку исходное соотношение (15) настоящей работы совпадает с соотношением (16) работы [1], а постановку задач в векторной форме можно считать в обоих случаях одинаковой, все векторные соотношения работы [1] полностью распространяются и на задачу, решаемую в данной статье. Однако соотношения в интегральной форме меняются, так как выражения для скалярных произведений многомерных векторов имеют здесь несколько более сложную запись (двойные интегралы вместо одинарных).

Так, например, в работе [1] введен коэффициент k использования энергии полезного сигнала при обнаружении на фоне мешающих сигналов и шума. Он равен отношению энергии порогового сигнала в этом случае к соответствующей энергии при обнаружении на фоне одного шума для фиксированных значений вероятности правильного обнаружения D и вероятности ложной тревоги F. Последняя понимается как «точечная», а не «интервальная», т. е. для фиксированного времени прихода сигнала, углового направления и т. п. Учитывая приведенные выше соображения, выражение для k получим в виде

$$k = \frac{\vec{u}_{m+1}\,\vec{r}_{m+1}}{\vec{u}^2_{m+1}} = \frac{\iint \dot{U}_{m+1}(t, x)\, \dot{R}^*_{m+1}(t, x)\, dt\, dx}{\iint |\dot{U}_{m+1}(t, x)|^2\, dt\, dx}. \tag{21}$$

Здесь комплексная амплитуда $\dot{R}_{m+1}(t, x)$ определяется из следующего рекуррентного соотношения:

$$\dot{R}_{i+1}(t, x) = \dot{U}_{i+1}(t, x) - \sum_{j=1}^{i} \dot{R}_j(t, x)\, \frac{\iint \dot{U}_{i+1}(t, x)\, \dot{R}^*_j(t, x)\, dt\, dx}{\frac{\lambda_0}{2} N_0 + \iint \dot{U}_j(t, x)\, \dot{R}^*_j(t, x)\, dt\, dx} \qquad (i = 1, \ldots, m). \tag{22}$$

При этом имеется в виду, что $\dot{R}_1(t, x) = \dot{U}_1(t, x)$. Функция $\dot{R}_{m+1}(t, x)$

удовлетворяет также интегральному уравнению

$$\dot{R}_{m+1}(t, x) + \iint \varphi(s, y, t, x)\, \dot{R}_{m+1}(s, y)\, ds\, dy = \dot{U}_{m+1}(t, x) \qquad (23)$$

с вырожденным ядром

$$\varphi(s, y, t, x) = \frac{2}{N_0 \lambda_0} \sum_{j=1}^{m} \dot{U}_j(t, x)\, \dot{U}_j^*(s, y), \qquad (24)$$

что может представлять интерес при рассмотрении случая $m \to \infty$.

Оптимальная обработка принимаемого колебания $\dot{U}(t, x)$ для сигнала со случайной начальной фазой и неслучайной (или случайной и распределенной по релеевскому закону) амплитудой сводится к вычислению величины

$$\left| \iint \dot{U}(t, x)\, \dot{R}_{m+1}^*(t, x)\, dt\, dx \right| \qquad (25)$$

и последующему сравнению ее с некоторым порогом.

При разрешении только двух сигналов и малом уровне шумов по сравнению с мешающим сигналом

$$N_0 \ll 2\vec{u}^2_{\text{меш}} = \frac{2}{\lambda_0} \iint |\dot{U}_{\text{меш}}(t, x)|^2\, dt\, dx$$

($\vec{u}_{\text{меш}}$ — соответственно $\vec{u}_1$ или $\vec{u}_2$) коэффициент использования энергии будет

$$k \simeq 1 - \rho. \qquad (26)$$

Здесь ρ — коэффициент «корреляции» разрешаемых сигналов:

$$\rho = \frac{\left| \iint \dot{U}_1(t, x)\, \dot{U}_2^*(t, x)\, dt\, dx \right|^2}{\iint |\dot{U}_1(t, x)|^2\, dt\, dx \iint |\dot{U}_2(t, x)|^2\, dt\, dx}, \qquad (27)$$

описываемых в данном случае неслучайными функциями $\dot{U}_1(t, x)$ и $\dot{U}_2(t, x)$.

Если для обнаружения используются две или три составляющих трехмерных векторов, произведения скалярных величин в соотношениях (21)—(27) следует заменить скалярными произведениями векторов поля.

4. ПРИМЕРЫ ПРИЛОЖЕНИЯ РЕЗУЛЬТАТОВ АНАЛИЗА

Пусть разрешаются два радиолокационных сигнала с комплексными амплитудами

$$\dot{U}_1(t, x) = \dot{A}\left(t - \tau_1 - \frac{x}{c}\cos\alpha_1\right) e^{-j\Omega_1 t} e^{-j\frac{2\pi}{\lambda_0} x\cos\alpha_1}, \qquad (28)$$

$$\dot{U}_2(t, x) = \dot{A}\left(t - \tau_2 - \frac{x}{c}\cos\alpha_2\right) e^{-j\Omega_2 t} e^{-j\frac{2\pi}{\lambda_0} x\cos\alpha_2}, \qquad (29)$$

что соответствует немонохроматическим плоским волнам, отличающимся направлением прихода α, временем запаздывания τ и допплеровской частотой Ω. При этом в силу (27) — (29)

$$\rho = \rho(\tau_1, \tau_2, \Omega_1, \Omega_2, \alpha_1, \alpha_2). \qquad (30)$$

Если значения запаздываний на раскрыве малы по сравнению с величиной, обратной ширине спектра частот, т. е.

$$\dot{A}\left(t - \tau_1 - \frac{x}{c}\cos\alpha_1\right) \simeq \dot{A}(t - \tau_1), \quad \dot{A}\left(t - \tau_2 - \frac{x}{c}\cos\alpha_2\right) \simeq \dot{A}(t - \tau_2),$$

'о

$$\rho = \rho_{\text{I}}(\tau_2 - \tau_1,\ \Omega_2 - \Omega_1)\,\rho_{\text{II}}(\alpha_1, \alpha_2), \tag{31}$$

'де $\rho_{\text{I}}(\Delta\tau, \Delta\Omega)$ — автокорреляционная функция по дальности и скоро-:ти, введенная в работах Вудворда [2] и Зиберта [3] (вне связи с коэффи-циентом использования энергии k); $\rho_{\text{II}}(\alpha_1, \alpha_2)$ — новая автокорреляцион-ная функция угловых координат. Здесь

$$\rho_{\text{I}}(\Delta\tau, \Delta\Omega) = \frac{\left|\int\limits_{-\infty}^{\infty} \dot{A}(t)\,\dot{A}^*(t-\Delta\tau)\,e^{j\Delta\Omega t}\,dt\right|^2}{\left[\int\limits_{-\infty}^{\infty} |\dot{A}(t)|^2\,dt\right]^2} \tag{32}$$

а

$$\rho_{\text{II}}(\alpha_1, \alpha_2) = \frac{\sin^2\dfrac{\pi l}{\lambda_0}(\cos\alpha_2 - \cos\alpha_1)}{\left[\dfrac{\pi l}{\lambda_0}(\cos\alpha_2 - \cos\alpha_1)\right]^2}. \tag{33}$$

Оценим коэффициент использования энергии при разрешении только по угловым координатам ($\tau_2 = \tau_1$, $\Omega_2 = \Omega_1$, $\rho_{\text{I}} = 1$ и $\rho = \rho_{\text{II}}$). Полагая $\Delta\alpha = \alpha_2 - \alpha_1 \ll \pi$, выражение (33) приведем предварительно к виду

$$\rho_{\text{II}} = \rho_{\text{II}}(\Delta\alpha) = \frac{\sin^2(\pi\Delta\alpha/\alpha_0)}{(\pi\Delta\alpha/\alpha_0)^2}, \tag{34}$$

где $\alpha_0 = \lambda_0/l \sin\alpha$ ($\alpha = (\alpha_1 + \alpha_2)/2$). Величину $2\alpha_0$ можно назвать шириной эквивалентной характеристики направленности раскрыва по нулям (без учета мешающих излучателей). За счет увеличения размера l и, следовательно, сужения ширины эквивалентной характеристики $2\alpha_0$ можно добиться уменьшения величины ρ_{II} до значений $\rho_{\text{II}} \ll 1$. Это соответствует обеспечению возможности разрешения объектов практически без потери в коэффициенте использования энергии, что широко используется на практике.

В отдельных случаях возможно угловое разрешение без увеличения размера l — разрешение в пределах ширины эквивалентной характеристики за счет снижения коэффициента использования энергии $k \simeq 1 - \rho = 1 - \rho_{\text{II}}$. Ограничиваясь в выражении (34) для ρ_{II} первыми двумя членами разложения в ряд по степеням величины $\pi\Delta\alpha/\alpha_0$, получим

$$k \simeq \frac{1}{3}\left(\frac{\pi\Delta\alpha}{\alpha_0}\right)^2. \tag{35}$$

Это значит, что наличие отражателя *1* не мешает принятию правильного решения о наличии или отсутствии отражателя *2* (взаимное положение отражателей известно), если есть запас энергии сигнала в $1/k$ раз. При $\Delta\alpha/\alpha_0 = 0{,}2$ величина $k \simeq 0{,}13$ и $1/k \simeq 7{,}5$.

Проанализируем характер соответствующей оптимальной обработки, позволяющей ослабить действие мешающего сигнала, достаточно сильного по сравнению с уровнем тепловых шумов ($N_0 \to 0$). Из соотношений (22), (28), (29) для этого случая получим

$$\dot{R}_2(t, x) = \dot{A}(t)\left\{e^{-j\frac{2\pi}{\lambda_0}x\cos\alpha_2} - \frac{\sin\left[\dfrac{\pi l}{\lambda_0}(\cos\alpha_2 - \cos\alpha_1)\right]}{\dfrac{\pi l}{\lambda_0}(\cos\alpha_2 - \cos\alpha_1)}\,e^{-j\frac{2\pi}{\lambda_0}x\cos\alpha_1}\right\}. \tag{36}$$

Функция $\dot{R}_2(t, x)$ соответствует вполне определенной обработке элементарных плоских волн

$$e^{j2\pi f\left(t - \frac{x}{c}\cos\alpha\right)} = \dot{U}_{f,\,\alpha}(t, x)\,e^{j2\pi f_0 t},$$

которая в соответствии с правилом (25) характеризуется соотношением

$$K_2(f, \alpha) = \iint \dot{R}_2^*(t, x)\, e^{j2\pi\left[(f-f_0)t - f\frac{x}{c}\cos\alpha\right]}\, dt\, dx. \qquad (37)$$

Величина $K_2(f, \alpha)$, определяемая выражениями (36), (37), представляет собой произведение оптимальной частотной характеристики $K(f)$ и оптимальной характеристики направленности $\psi(\alpha)$. Для $f \simeq f_0$

$$\psi(\alpha) = \frac{\sin\left[\frac{\pi l}{\lambda_0}(\cos\alpha - \cos\alpha_2)\right]}{\frac{\pi l}{\lambda_0}(\cos\alpha - \cos\alpha_2)} - \frac{\sin\left[\frac{\pi l}{\lambda_0}(\cos\alpha - \cos\alpha_1)\right]}{\frac{\pi l}{\lambda_0}(\cos\alpha - \cos\alpha_1)} \frac{\sin\left[\frac{\pi l}{\lambda_0}(\cos\alpha_2 - \cos\alpha_1)\right]}{\frac{\pi l}{\lambda_0}(\cos\alpha_2 - \cos\alpha_1)}.$$

В направлении на мешающий объект эта характеристика обеспечивает нулевой прием, за счет чего и осуществляется разрешение.

Перейдем к случаю, когда расположение мешающих отражателей точно неизвестно и приходится принять, что они равномерно распределены по угловым координатам. Учитывая только различия в угловых координатах, положим

$$\dot{U}_{m+1}(t, x) = \dot{U}_0(t, x) = \dot{A}_0(t)\, e^{-j\frac{2\pi}{\lambda_0}x\cos\alpha_0}$$

и

$$\dot{U}_j(t, x) = \dot{A}_0(t)\, e^{-j\frac{2\pi}{\lambda_0}x\cos\alpha_j} \sqrt{\frac{d}{4\pi}\sin\alpha_j \Delta\alpha_j \Delta\beta_j},$$

где d характеризует отношение объемных плотностей энергий суммарного мешающего и полезного поля, а $j \leqslant m$.

Переходя от суммы (24) к интегралу и интегрируя по α и β, получим

$$\varphi(s, y, t, x) = \frac{2d}{N_0}\dot{A}_0(t)\,\dot{A}_0^*(s)\,\frac{\sin\frac{2\pi}{\lambda_0}(x-y)}{\frac{2\pi}{\lambda_0}(x-y)}.$$

Поскольку $\varphi(s, y, t, x)$ и $\dot{U}_{m+1}(t, x)$ пропорциональны $\dot{A}_0(t)$, решение уравнения (23) можно представить в виде $\dot{R}(t, x) = \dot{A}_0(t)\, r(x)$, где $r(x)$ удовлетворяет интегральному уравнению

$$r(x) + \frac{2\varkappa}{\lambda_0}\int_{-l/2}^{l/2}\frac{\sin\frac{2\pi}{\lambda_0}(x-y)}{\frac{2\pi}{\lambda_0}(x-y)}\, r(y)\, dy = e^{-j\frac{2\pi}{\lambda_0}x\cos\alpha_0}.$$

Здесь

$$\varkappa = \frac{d}{N_0}\int_{-\infty}^{\infty}|\dot{A}_0(s)|^2\, ds.$$

Для случая весьма протяженной антенны ($\lambda_0/l \to 0$) решение интегрального уравнения можно найти в виде

$$r(x) = \frac{1}{1+\varkappa}\, e^{-j\frac{2\pi}{\lambda_0}x\cos\alpha_0},$$

что соответствует оптимальной характеристике направленности

$$\psi(\alpha) = \frac{\sin\left[\frac{\pi l}{\lambda_0}(\cos\alpha - \cos\alpha_0)\right]}{\frac{\pi l}{\lambda_0}(\cos\alpha - \cos\alpha_0)},$$

такой же, что и в отсутствие мешающих отражателей.

Это значит, что какие-либо искусственные приемы (без увеличения раскрыва) не могут в данном случае улучшить разрешения.

Подход к вопросам разрешения, развитый в настоящей статье, не является единственно возможным. Обнаруженный объект можно считать разрешенным, если наличие другого объекта (или ряда объектов) существенно не ухудшает точности измерения параметров. Основные расчетные соотношения данной работы можно распространить и на этот случай, если, например, вместо анализа отношения правдоподобия использовать анализ апостериорной вероятности значений измеряемых параметров. Распространение результатов на раскрывы антенн с разрывами не представляет большого труда, если длина разорванных участков велика по сравнению с длиной волны λ_0, и сводится к подстановке соответствующих пределов интегрирования в формулы § 3. Можно, очевидно, снять и предположения о достаточно большом (по сравнению с λ_0) размере и одномерности раскрыва, но для этого надо перейти к более общей форме канонических разложений, чем это дает применение теоремы Котельникова.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Заменяя в соотношении (17) значения функции $u(t, x)$ рядом (7) в пределах интервала времени T и нулем за пределами этого интервала, для $f = f_m$ получим

$$g_u(f_m, x) = \frac{T}{2}\sum_n (a_{mn} - jb_{mn})\frac{\sin\left[\frac{2\pi}{c} f_m (x - x_{mn})\right]}{\frac{2\pi}{c} f_m (x - x_{mn})} =$$

$$= \sum_n g_u(f_m, x)\frac{\sin\left[\frac{2\pi}{c} f_m (x - x_{mn})\right]}{\frac{2\pi}{c} f_m (x - x_{mn})}. \qquad (38)$$

Поскольку для функции $u(t, x)$

$$a_{mn} = 2\,\mathrm{Re}\, g_u(f_m, x_{mn})/T, \quad b_{mn} = -2\,\mathrm{Im}\, g_u(f_m, x_{mn})/T \qquad (39)$$

(аналогично для функции $v(t, x)$), используя равенство $\mathrm{Re}(AB^*) = \mathrm{Re}\,A\,\mathrm{Re}\,B + \mathrm{Im}\,A\,\mathrm{Im}\,B$ и соотношения (14), (15) и (39), найдем

$$\overrightarrow{uv} = \frac{2}{T}\,\mathrm{Re}\sum_{m,\,n} g_u(f_m, x_{mn})\, g_v^*(f_m, x_{mn}). \qquad (40)$$

В силу соотношения (38) имеет место равенство

$$\int_{-l/2}^{l/2} g_u(f_m, x)\, g_v^*(f_m, x)\, dx =$$

$$= \sum_{n,\nu} g_u(f_m, x_{mn})\, g_v^*(f_m, x_{m\nu}) \int_{-l/2}^{l/2} \frac{\sin\left[\frac{2\pi}{c} f_m (x - x_{mn})\right]}{\frac{2\pi}{c} f_m (x - x_{mn})} \frac{\sin\left[\frac{2\pi}{c} f_m (x - x_{m\nu})\right]}{\frac{2\pi}{c} f_m (x - x_{m\nu})}\, dx, \qquad (41)$$

а при бесконечных пределах интегрирования ($l \to \infty$)

$$\int g_u(f_m, x)\, g_v^*(f_m, x)\, dx = \frac{c}{2f_m}\sum_n g_u(f_m, x_{mn})\, g_v^*(f_m, x_{mn}). \qquad (42)$$

Заметим, что интегралы в правой части равенства (41) определяются значениями подынтегрального выражения на участке между ближайшими точками дискретизации, охватывающими точки x_{mn} и $x_{m\nu}$. Можно приближенно пользоваться соотно-

нением (42) и при конечных l, если суммирование ведется по точкам дискретизации, расположенным в пределах раскрыва, т. е. так же как и в (7), (38), (40).

Заменяя в соотношении (40) $1/T = \Delta f_m$, используя (42) и переходя к пределу при $\Delta f_m \to 0$, получим

$$\overrightarrow{uv} = \frac{4}{c} \operatorname{Re} \int_0^\infty df \int_{-l/2}^{l/2} f g_u(f, x)\, g_v^*(f, x)\, dx.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Я. Д. Ширман, Теория обнаружения полезного сигнала на фоне гауссовых шумов и произвольного числа мешающих сигналов со случайными амплитудами и начальными фазами, Радиотехника и электроника, 1959, 4, 12, 1957.
2. Ф. М. Вудворд, Теория вероятностей и теория информации с применениями в радиолокации, перев. с англ., Изд. Советское радио, 1955.
3. Зиберт, Общие закономерности обнаружения целей при помощи радиолокации, Вопросы радиолокационной техники, 1957, 5(41), 3.

Поступила в редакцию
24 IX 1960

ПОПЕРЕЧНАЯ ДИФФУЗИЯ ПРИ ДИФРАКЦИИ НА ИМПЕДАНСНОМ ЦИЛИНДРЕ БОЛЬШОГО РАДИУСА. Ч. I. ПАРАБОЛИЧЕСКОЕ УРАВНЕНИЕ В ЛУЧЕВЫХ КООРДИНАТАХ

Г. Д. Малюжинец, Л. А. Вайнштейн

Рассмотрена двухмерная задача о дифракции цилиндрической или плоской волны на круговом цилиндре с граничными условиями импедансного типа (при условии, что радиус цилиндра велик по сравнению с длиной волны). Эта задача решена при помощи параболического уравнения Леонтовича — Фока, записанного в лучевых координатах и учитывающего «поперечную диффузию» волновой амплитуды. Получено общее решение дифракционной задачи, пригодное при любых расстояниях источника и точки наблюдения до цилиндра и согласующееся с формулами геометрической оптики в освещенной области.

ВВЕДЕНИЕ

В фундаментальных работах М. А. Леонтовича и В. А. Фока [1—4] для исследования асимптотических законов дифракции предложен метод параболического уравнения, при помощи которого решена задача о распространении радиоволн вдоль плоской [1, 2] и сферической [2] земной поверхности, а также задача о поле плоской электромагнитной волны в области полутени вблизи поверхности проводящего выпуклого тела [3, 4], размеры и радиусы кривизны которого значительно больше длины волны. Оказывается, однако, что параболическое уравнение, записанное в лучевых (эвольвентных) координатах и учитывающее лишь поперечную диффузию волновой амплитуды, позволяет найти дифракционное поле во всей теневой области на произвольных расстояниях от выпуклого тела, а также в области полутени — вплоть до смыкания с формулами геометрической оптики. В данной работе это показано на примере дифракции цилиндрических и плоских волн на импедансном круговом цилиндре, радиус которого гораздо больше длины волны.

Теоретическая трактовка дифракционных явлений, примененная в данной работе, неоднократно излагалась Г. Д. Малюжинцем в докладах на конференциях в 1946, 1957, 1959 и 1960 гг. (см. [5—8]), а также в обзорной статье [9]. Эта трактовка отличается значительной общностью и, в частности, как показано ниже, включает в себя концепцию дифракционных лучей.

1. МНОГОЛИСТНАЯ ПЛОСКОСТЬ И ЛУЧЕВЫЕ КООРДИНАТЫ

Двухмерная задача о дифракции цилиндрической волны на круговом цилиндре радиуса r сводится к нахождению функции Грина G, удовлетворяющей волновому уравнению

$$\frac{\partial^2 G}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial G}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 G}{\partial \varphi^2}+k^2 G=0 \quad (a<r<\infty) \tag{1}$$

(r, φ — полярные координаты точки наблюдения) всюду, кроме источника — «светящейся линии», параллельной оси цилиндра и имеющей полярные координаты $r', 0$; первичная волна, создаваемая источником, есть

$$G^0=\pi i H_0^{(1)}(k\rho), \quad \rho=\sqrt{r^2-2rr'\cos\varphi+r'^2}\,. \tag{2}$$

Это значит, что на луче $\varphi = 0$ функция Грина G непрерывна, а ее производная $\partial G/\partial\varphi$ терпит скачок

$$\left.\frac{\partial G}{\partial \varphi}\right|_{\varphi=+0} - \left.\frac{\partial G}{\partial \varphi}\right|_{\varphi=-0} = -4\pi r\delta(r-r'). \tag{3}$$

На бесконечности (при $r \to \infty$) функция G должна удовлетворять условию излучения, а на поверхности цилиндра — импедансному граничному условию

$$\frac{\partial G}{\partial r} + ikgG = 0 \quad (\text{при } r = a). \tag{4}$$

В акустике G есть потенциал скоростей или давление, а $1/g$ — нормальный импеданс (полное сопротивление). В электродинамике (4) представляет собой граничное условие Леонтовича и G есть либо составляющая магнитного поля вдоль оси цилиндра, либо соответствующая компонента электрического поля; в первом случае $g = w$, во втором случае $g = 1/w$, где $w = \sqrt{\mu/\varepsilon}$ есть волновое сопротивление цилиндра.

Функция G удовлетворяет соотношению взаимности

$$G(r, \varphi, r') = G(r', -\varphi, r) \tag{5}$$

и должна удовлетворять условию периодичности

$$G(r, \varphi + 2\pi j, r') = G(r, \varphi, r'), \; j = \pm 1, \pm 2, \ldots . \tag{6}$$

Наряду с функцией G целесообразно ввести функцию Грина на многолистной плоскости * $\Gamma = \Gamma(r, \varphi, r')$, которая удовлетворяет соотношениям (1)—(5), но вместо условия периодичности (6) для нее выполняется условие

$$\Gamma(r, \varphi, r') \to 0 \text{ при } |\varphi| \to \infty. \tag{7}$$

Функции G и Γ связаны формулой

$$G(r, \varphi, r') = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \Gamma(r, \varphi + 2\pi j, r'). \tag{8}$$

Искомую функцию Грина Γ удобно представить не в полярных координатах r, φ, а в лучевых координатах ξ, η, адекватных данной дифракционной задаче. Эти координаты вводятся следующим образом: считая сначала, что точка наблюдения P находится в области тени (рис. 1, *а*, *б*), мы проводим из точки P касательную PT к окружности цилиндра $r = a$, а из источника P' — касательную $P'T'$ и характеризуем положение точки P при помощи координат

$$\xi = PT + \eta, \quad \eta = \overset{\frown}{T'T}, \tag{9}$$

а положение точки P' — при помощи разности

$$\xi' - \eta = P'T'. \tag{10}$$

Координаты ξ, η однозначно связаны с координатами r, φ на многолистной плоскости: так, на рис. 1, *а*, *б* точке P приводятся в соответствие разные ξ и η, но на рис. 1, *а* точка P лежит на «нулевом» листе плоскости ($-\pi < \varphi < \pi$), а на рис. 1, *б* — на -1-м листе ($-3\pi < \varphi < -\pi$). Лучевые координаты точки P на j-м листе ($j = 1, 2, \ldots$) равны $\xi + 2\pi aj$, $\eta + 2\pi aj$ (где ξ, η соответствуют нулевому листу, см. рис. 1, *а*), а лучевые координаты точки P на $-j$-м листе ($j = 1, 2, \ldots$) равны $\xi + 2\pi a(j-1)$, $\eta + 2\pi a(j-1)$ (где ξ, η — ее координаты на -1-м листе, рис. 1, *б*).

Если точка P расположена на нулевом листе, то она может попасть в освещенную область (ср. рис. 1, *в*). В этом случае мы формально вводим

* Многолистная плоскость при рассмотрении дифракции вокруг цилиндра впервые введена в [10] (см. также [11]).

учевые координаты ξ, η так же, как для области тени, т. е. проводим ка-ательные PT и $P'T'$ и полагаем

$$\xi - \eta = PT, \quad \xi' - \eta = P'T', \tag{11}$$

читая координату η отрицательной:

$$\eta = -\widehat{TT'}. \tag{12}$$

Физически очевидно, что в освещенной области координаты ξ, η при-одны для представления функции Г только при достаточно малых $|\eta|$, . е. вблизи границы освещенной области, а вдали от этой границы функ-ия Г представляется в виде уммы первичной волны (2) отраженной волны, подчи-яющейся законам геометри-еской оптики (для этой олны лучевые координаты ужно вводить по-дру-ому).

Однако вывод законов гео-етрической оптики из волно-ого уравнения (1) вряд ли редставляет какой-либо ин-ерес, а применение луче-ых координат (11)—(12) в бласти полутени, при $|\eta/a| \ll 1$, позволяет произвести ыкание дифракционных ормул с формулами гео-етрической оптики и тем са-ым получить полное ре-ение рассматриваемой за-ачи.

Легко показать, что ξ и η образуют ортогональную истему координат. Линии $\eta = \text{const}$ суть лучи, касаю-иеся окружности цилиндра, а линии $\xi = \text{const}$ — эволь-венты этой окружности (см. ис. 2), причем коэффициен-ы Ламе равны

$$h_\xi = 1, \qquad h_\eta = \frac{\xi - \eta}{a}. \tag{13}$$

Волновое уравнение (1) в учевых координатах прини-ает вид

$$\frac{\partial^2 \Gamma}{\partial \xi^2} + \frac{1}{\xi - \eta}\frac{\partial \Gamma}{\partial \xi} + \frac{a^2}{\xi - \eta}\frac{\partial}{\partial \eta}\left(\frac{1}{\xi - \eta}\frac{\partial \Gamma}{\partial \eta}\right) + k^2\Gamma = 0. \tag{14}$$

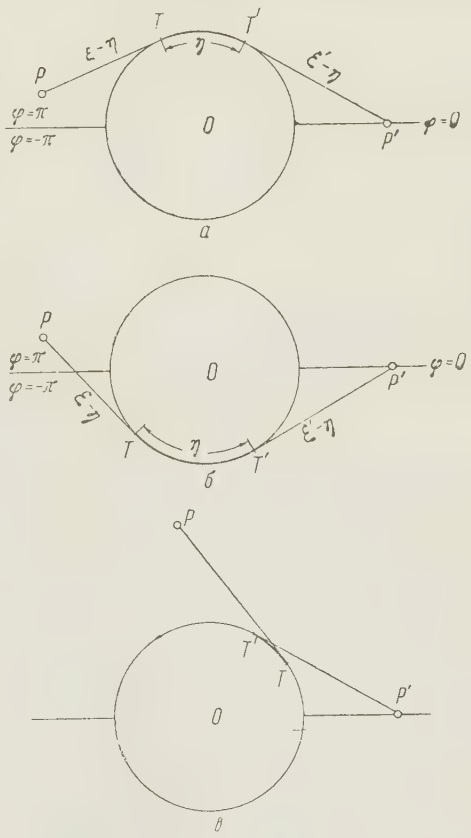


Рис. 1. Лучевые координаты для цилиндра

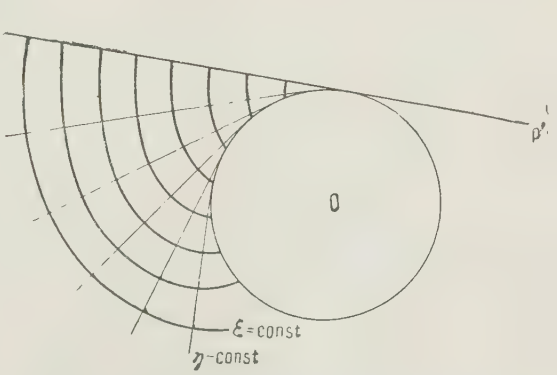


Рис. 2. Лучи ($\eta = \text{const}$) и эвольвенты ($\xi = \text{const}$)

2. ПАРАБОЛИЧЕСКОЕ УРАВНЕНИЕ В ЛУЧЕВЫХ КООРДИНАТАХ

Переходя к приближенному решению уравнения (14) при условии

$$M^2 \gg 1, \tag{15}$$

где

$$M = \left(\frac{ka}{2}\right)^{1/3}, \tag{16}$$

прежде всего произведем замену

$$\Gamma = e^{ik\xi} W, \tag{17}$$

выделяя фазовый множитель $e^{ik\xi}$ и вводя функцию W — медленно меняющуюся волновую амплитуду (вообще говоря, комплексную). Она удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial^2 W}{\partial \xi^2} + \left(2ik + \frac{1}{\xi - \eta}\right)\frac{\partial W}{\partial \xi} + \frac{ik}{\xi - \eta} W + \frac{a^2}{\xi - \eta}\frac{\partial}{\partial \eta}\left(\frac{1}{\xi - \eta}\frac{\partial W}{\partial \eta}\right) = 0, \tag{18}$$

которое после введения безразмерных независимых переменных

$$X = M\frac{\xi}{a}, \qquad Z = M\frac{\eta}{a} \tag{19}$$

принимает вид

$$4i\frac{\partial W}{\partial X} + \frac{2i}{X - Z} W + \frac{1}{X - Z}\frac{\partial}{\partial Z}\left(\frac{1}{X - Z}\frac{\partial W}{\partial Z}\right) + \frac{1}{M^2}\left(\frac{\partial^2 W}{\partial X^2} + \frac{1}{X - Z}\frac{\partial W}{\partial X}\right) = 0. \tag{20}$$

Пренебрегая в этом уравнении членами порядка $1/M^2$, получаем уравнение параболического типа

$$4i\frac{\partial W}{\partial X} + \frac{2i}{X - Z} W + \frac{1}{X - Z}\frac{\partial}{\partial Z}\left(\frac{1}{X - Z}\frac{\partial W}{\partial Z}\right) = 0, \tag{21}$$

в котором третий член, содержащий $\partial W/\partial Z$, учитывает поперечную диффузию волновой амплитуды, а члены порядка $1/M^2$ в уравнении (20) соответствуют «продольной диффузии», которой в данной задаче можно пренебречь (ср. [9]).

Уравнение (21) можно упростить. Введем новую переменную

$$Y = (X - Z)^2 = M^2\left(\frac{\xi - \eta}{a}\right)^2; \quad Z = X - \sqrt{Y} \tag{22}$$

и будем рассматривать W как функцию X и Y. Тогда уравнение (21) примет вид

$$i\frac{\partial W}{\partial X} + \frac{i}{2\sqrt{Y}} W + \frac{\partial^2 W}{\partial Y^2} + 2i\sqrt{Y}\frac{\partial W}{\partial Y} = 0 \tag{23}$$

и после подстановки

$$W = e^{-i\frac{2}{3}Y^{3/2}} W_1 \tag{24}$$

превращается в параболическое уравнение Леонтовича — Фока

$$i\frac{\partial W_1}{\partial X} + YW_1 + \frac{\partial^2 W_1}{\partial Y^2} = 0, \tag{25}$$

исследованное в работе [2]. Граничное условие (4) при переходе к функции W_1 принимает вид

$$\frac{\partial W_1}{\partial Y} + qW_1 = 0, \quad q = iMg \quad (\text{при } Y = 0), \tag{26}$$

поскольку высота h точки P над поверхностью цилиндра

$$h = \sqrt{a^2 + (\xi - \eta)^2} - a \tag{27}$$

при $h \ll a$ равна

$$h = \frac{(\xi - \eta)^2}{2a} = \frac{aY}{2M^2} = \frac{MY}{k}. \tag{28}$$

Общее решение уравнения (25), удовлетворяющее условию излучения

и граничному условию (26), имеет вид

$$W_1 = \sum_{s=1}^{\infty} C_s e^{it_s X} w_1 (t_s - Y), \tag{29}$$

где C_s — неизвестные коэффициенты; w_1 — функция Эйри, соответствующая уходящей волне, а t_s суть корни уравнения

$$w_1'(t_s) - q w_1(t_s) = 0 \quad (s = 1, 2, \ldots), \tag{30}$$

детально исследованного в § 7 [12].

Функции Г, W и W_1, а значит и коэффициенты C_s, зависят от положения источника, которое мы определяем разностью (10) и соответствующей безразмерной переменной

$$Y' = M^2 \left(\frac{\xi' - \eta}{a}\right)^2. \tag{31}$$

Для того чтобы W была медленно меняющейся функцией $\xi' - \eta$, нужно вместо $e^{ik\xi}$ выделить в формуле (17) фазовый множитель

$$e^{ik(\xi + \xi' - \eta)} = e^{ik\sigma},$$

где

$$\sigma = \xi + \xi' - \eta \tag{32}$$

есть расстояние между точками P' и P, взятое по минимальному пути (дифракционному лучу), состоящему из прямолинейных отрезков $P'T'$ и TP и дуги $T'T$. Учитывая далее, что в функцию Г переменные ξ' и ξ, Y' и Y должны входить симметрично, приходим к выражению

$$\Gamma = e^{i\left(k\sigma - \frac{2}{3}Y^{3/2} - \frac{2}{3}Y'^{3/2}\right)} \sum_{s=1}^{\infty} c_s e^{it_s X} w_1 (t_s - Y)\, w_1 (t_s - Y'), \tag{33}$$

где X определяется новой формулой

$$X = M\frac{\sigma}{a} = M\frac{\xi + \xi' - \eta}{a}, \tag{34}$$

в которой ξ и ξ' фигурируют симметрично. При $\xi' = \eta$, когда точка P' лежит на поверхности цилиндра, формула (34) переходит в первоначальное определение (19) величины X; переход от (29) к (33) означает, что коэффициент C_s содержит множитель $e^{it_s M\frac{\xi' - \eta}{a}}$.

3. ОПРЕДЕЛЕНИЕ КОЭФФИЦИЕНТОВ c_s (ОБЕ ТОЧКИ ВБЛИЗИ ПОВЕРХНОСТИ ЦИЛИНДРА)

Коэффициенты c_s в формуле (33) могут зависеть только от параметров q и M. Их можно найти из следующих соображений (ср. [2] и [13]). Пусть источник P' и точка наблюдения P лежат вблизи поверхности цилиндра, так что их высоты $h' = r' - a$ и $h = r - a$ удовлетворяют условиям

$$h' \ll a, \quad h \ll a. \tag{35}$$

Тогда в формуле (33) переменные Y и Y' можно заменить на y и y', где согласно формуле (28)

$$y = \frac{kh}{M}, \qquad y' = \frac{kh'}{M}, \tag{36}$$

и кроме того положить

$$e^{i\left(k\sigma - \frac{2}{3}Y^{3/2} - \frac{2}{3}Y'^{3/2}\right)} = e^{ik\alpha|\varphi|} = e^{ikl}, \tag{37}$$

где $l = a|\varphi|$ есть расстояние между точками P' и P по поверхности ци-

линдра. Последнее соотношение следует из рис. 3, где

$$\left.\begin{aligned} \angle P'OP = |\varphi| &= \frac{\eta}{a} + \Delta\varphi + \Delta\varphi', \\ \Delta\varphi = \operatorname{arc\,tg}\frac{\xi-\eta}{a} &= \frac{\xi-\eta}{a} - \frac{1}{3}\left(\frac{\xi-\eta}{a}\right)^3 + \ldots, \end{aligned}\right\} \tag{38}$$

так что при малых $\Delta\varphi$ и $\Delta\varphi'$

$$\left.\begin{aligned} ka\Delta\varphi = k(\xi-\eta) - \frac{2}{3}Y^{3/2}, \quad ka\Delta\varphi' &= k(\xi'-\eta) - \frac{2}{3}Y'^{3/2}, \\ ka|\varphi| = k\sigma - \frac{2}{3}Y^{3/2} - \frac{2}{3}Y'^{3/2}&. \end{aligned}\right\} \tag{39}$$

При конечных Y и Y' можно также заменить X на

$$x = M|\varphi| = M\frac{l}{a}, \tag{40}$$

и формула (33) принимает вид

$$\Gamma = e^{ikl}\sum_{s=1}^{\infty} c_s e^{it_s x} w_1(t_s - y)\, w_1(t_s - y'). \tag{41}$$

Коэффициенты c_s следует выбирать так, чтобы в освещенной области была справедлива отражательная формула

$$\Gamma = \sqrt{\frac{2\pi}{kl}}\, e^{i\left(kl+\frac{\pi}{4}\right)}\left[e^{\frac{ik(h-h')^2}{2l}} + e^{\frac{ik(h+h')^2}{2l}}\frac{h+h'-gl}{h+h'+gl}\right], \tag{42}$$

соответствующая плоской отражающей поверхности и достаточно пологим лучам. Первый член в квадратной скобке (42) дает первичную волну (2)

$$G^0 = \sqrt{\frac{2\pi}{k\rho}}\, e^{i\left(k\rho+\frac{\pi}{4}\right)}, \quad \rho = \sqrt{l^2 + (h-h')^2} \simeq l + \frac{(h-h')^2}{2l}, \tag{43}$$

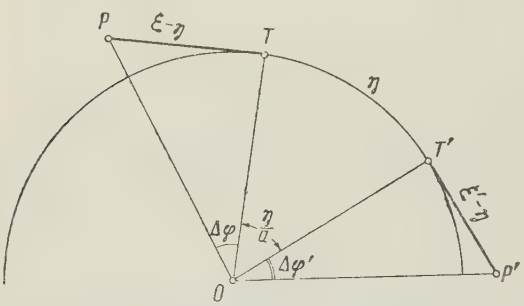


Рис. 3. Углы $\Delta\varphi$ и $\Delta\varphi'$ в случае, когда обе точки находятся вблизи цилиндра

второй член — отраженную волну, исходящую от мнимого источника и имеющую коэффициент отражения

$$\frac{\cos\chi - g}{\cos\chi + g} \simeq \frac{\frac{h+h'}{l} - g}{\frac{h+h'}{l} + g}, \tag{44}$$

где χ — угол падения (близкий к $\pi/2$).

Если мы положим

$$\Gamma = \frac{2\pi i}{M} e^{ikl}\Psi(x, y, y', q), \tag{45}$$

где функция Ψ определяется контурным интегралом (контур C охватывает все точки t_s в положительном направлении)

$$\Psi(x, y, y', q) = \frac{1}{4\pi}\int_C e^{itx} w_1(t - y')\left[w_2(t-y) - \frac{w_2'(t) - q w_2(t)}{w_1'(t) - q w_1(t)} w_1(t-y)\right] dt \tag{46}$$

и рядом вычетов

$$\Psi(x, y, y', q) = \sum_{s=1}^{\infty} \frac{e^{it_s x}}{t_s - q^2}\frac{w_1(t_s - y)}{w_1(t_s)}\frac{w_1(t_s - y')}{w_1(t_s)}, \tag{47}$$

то в силу формулы (см. [13], § 5)

$$\Psi = \frac{e^{-i\frac{\pi}{4}}}{2\sqrt{\pi x}}\left[e^{i\frac{(y-y')^2}{4x}} + e^{i\frac{(y+y')^2}{4x}}\frac{y+y'+2iqx}{y+y'-2iqx}\right] (x \to 0) \tag{48}$$

мы действительно получаем отражательную формулу (42). Доказать единственность решения (46) затруднительно (ср. [2]); можно лишь сослаться на ч. II данной работы [19], где приведен более строгий вывод формул (45) и (46).

Заметим, что при написании интеграла (46) предполагается, что $y' \geqslant y$; если же $y' < y$, то нужно поменять местами y и y'. Функция Ψ связана с множителем ослабления V, фигурирующим в теории распространения радиоволн вокруг земной поверхности и частично табулированным в [14] и [15], соотношением

$$V(x, y, y', q) = 2\sqrt{\pi x}\, e^{i\frac{\pi}{4}} \Psi(x, y, y', q). \tag{49}$$

Для дальнейшего существенны также функции $V_1(z, y, q)$ и $V_{11}(\zeta, \mu, q)$, определение которых можно найти в § 3 [14].

Как уже отмечалось, формула (42) соответствует пологим лучам и должна быть дополнена формулой, пригодной при бо́льших высотах h и h'. С другой стороны, при уменьшении h и h' или при увеличении l формула (42) становится неприменимой из-за того, что необходимо учитывать кривизну отражающей поверхности (и в частности дополнительную расходимость отраженных лучей, ср. [14], § 5), а при малых $|g|$ — применять формулу Вейля—ван дер Поля, не говоря уже о том, что вблизи границы освещенной области вступают в силу дифракционные явления.

Сравнивая формулы (45) и (47) с формулой (41), получаем

$$c_s = \frac{2\pi i}{M} \frac{1}{(t_s - q^2)\, w_1^2(t_s)}. \tag{50}$$

Поскольку коэффициенты c_s не могут зависеть от Y и Y', общая формула (33) принимает вид

$$\Gamma = \frac{2\pi i}{M}\, e^{i\left(k\sigma - \frac{2}{3}Y^{3/2} - \frac{2}{3}Y'^{3/2}\right)} \Psi(X, Y, Y', q). \tag{51}$$

Это выражение, пригодное для любых расстояний источника и точки наблюдения до цилиндра, является основным результатом данной работы. Отметим, что оно получается из формулы (45), справедливой лишь при условиях (35), заменой множителя e^{ikl} на более сложный и подстановкой в функцию Ψ вместо переменных x, y, y' новых переменных X, Y, Y', связанных с лучевыми координатами.

Ниже показано, что выражение (51) согласуется с результатами, полученными в других работах при более частной постановке задачи, и смыкается с формулами геометрической оптики в освещенной области.

4. ОДНА ТОЧКА ВБЛИЗИ ЦИЛИНДРА, ДРУГАЯ — ВДАЛИ ОТ НЕГО

Освободимся теперь от условий (35). В этом параграфе мы будем считать, что $h \ll a$, но высота h' может быть сколь угодно большой, например $h' \sim a$ или $h' \gg a$. Тогда величина Y' будет большой, и можно применить соотношение

$$\Psi(X, Y, Y', q) = \frac{1}{2\sqrt{\pi} Y'^{1/4}}\, e^{i\left(\frac{2}{3}Y'^{3/2} - \frac{\pi}{4}\right)} V_1(z, Y, q), \tag{52}$$

где

$$z = X - \sqrt{Y'} = M\frac{\xi}{a}; \tag{53}$$

$$V_1(z, y, q) = \frac{i}{2\sqrt{\pi}} \int_C e^{itz} \left[w_2(t - y) - \frac{w_2'(t) - q w_2(t)}{w_1'(t) - q w_1(t)}\, w_1(t - y) \right] dt. \tag{54}$$

Формула (51) переписывается в виде

$$\Gamma = \sqrt{\frac{2\pi}{k(\xi'-\eta)}}\, e^{i\left[k(\xi'-\eta)+\frac{\pi}{4}\right]} e^{i\left(k\xi-\frac{2}{3}Y^{3/2}\right)} V_1(z, Y, q). \tag{55}$$

Последнее выражение распадается на два множителя: множитель

$$G^0 = \sqrt{\frac{2\pi}{k(\xi'-\eta)}}\, e^{i\left[k(\xi'-\eta)+\frac{\pi}{4}\right]} \tag{56}$$

соответствует свободному распространению первичной цилиндрической волны (2) от источника P' до точки касания T'; второй множитель соответствует дифракционному распространению по пути $T'TP$. Если первичная волна — плоская,

$$G^0 = e^{-ikr\cos\varphi}, \tag{57}$$

то формула (55) упрощается следующим образом:

$$\Gamma = e^{i\left(k\xi-\frac{2}{3}Y^{3/2}\right)} V_1(z, Y, q). \tag{58}$$

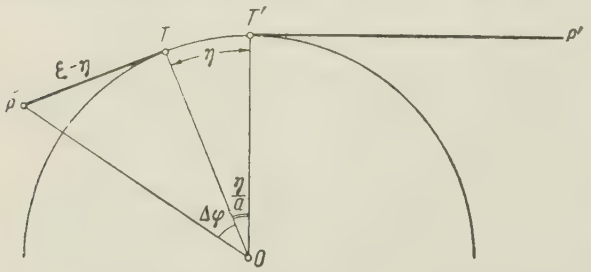


Рис. 4. Координаты ξ, η и угол $\Delta\varphi$ для плоской волны (или для удаленного источника P')

Смысл ξ и η показан на рис. 4. Обозначим

$$\angle POT' = \psi = \frac{\eta}{a} + \Delta\varphi; \tag{59}$$

тогда в силу первого соотношения (39)

$$ka\psi = k\xi - \frac{2}{3}Y^{3/2} \tag{60}$$

и вместо формулы (57) можно, заменяя Y на y, написать

$$\Gamma = e^{ika\psi} V_1(z, y, q), \tag{61}$$

где $z = M\psi$.

Последнее выражение согласуется с формулами, выведенными в [16] и [17]. В освещенной области z и ψ отрицательны, а при больших отрицательных z для функции V_1 справедлива асимптотическая формула

$$V_1(z, y, q) = e^{-\frac{i}{3}z^3}\left(e^{izy} + \frac{z-iq}{z+iq}e^{-izy}\right). \tag{62}$$

Из нее следует, что формула (61) обеспечивает смыкание с геометрической оптикой: первое слагаемое в скобке (62) дает падающую волну, второе — отраженную, $\frac{\pi}{2}+\psi$ есть угол падения.

В освещенной области ($\psi < 0$, $z < 0$) можно вместо формулы (61) применять интерполяционную формулу (ср. [16])

$$\Gamma = e^{ika\sin\psi} e^{\frac{i}{3}z^3} V_1(z, y, q), \quad z = M\sin\psi, \tag{63}$$

которая при конечных z и малых ψ практически совпадает с формулой (61), а при больших отрицательных z в силу выражения (62) переходит в отражательную формулу

$$\Gamma = e^{-ik(a+h)\cos\varphi} + e^{-ik(a-h)\cos\varphi}\frac{\cos\varphi - g}{\cos\varphi + g}, \tag{64}$$

пригодную при любом угле падения $\varphi = \frac{\pi}{2}+\psi$.

Нетрудно проверить, что и при падении цилиндрической волны (56), создаваемой удаленным источником, формула (55) дает при конечных Y и $z < 0$ смыкание с геометрической оптикой. В силу соотношения

заимности (5) выписанные выше формулы пригодны и в тех случаях, огда источник находится вблизи цилиндра, а точка наблюдения — вдали т него.

Заметим, что «отражательную формулу» (62) для функции V_1 можно точнить так, что она будет учитывать влияние кривизны отражающей оверхности на отраженную волну (см. [4], § 5 или [14], § 5); однако при остаточно больших отрицательных z и конечных y этим влиянием можно пренебречь.

5. ОБЕ ТОЧКИ ВДАЛИ ОТ ЦИЛИНДРА

Рассмотрим сначала случай, когда падающая волна — плоская, и удем считать величину Y в формуле (58) большой (конечные и малые начения Y рассмотрены выше). Введем переменную

$$\zeta = z - \sqrt{Y} = M\frac{\eta}{a} \tag{65}$$

и воспользуемся соотношениями (см. [14], § 3)

$$\left.\begin{aligned} V_1(z, Y, q) &= \frac{1}{Y^{1/4}} e^{i\frac{2}{3}Y^{3/2}} V_{11}(\zeta, Y^{1/4}, q) \text{ при } \zeta > 0, \\ V_1(z, Y, q) &= e^{-\frac{i}{3}z^3 + izY} + \frac{1}{Y^{1/4}} e^{i\frac{2}{3}Y^{3/2}} V_{11}(\zeta, Y^{1/4}, q) \text{ при } \zeta < 0, \end{aligned}\right\} \tag{66}$$

где
$$V_{11}(\zeta, \mu, q) = V^{(0)}(\zeta, \mu) + V^{(1)}(\zeta, q) + V^{(2)}(\zeta, q). \tag{67}$$

Функции $V^{(0)}$, $V^{(1)}$ и $V^{(2)}$ определяются так:

$$\left.\begin{aligned} V^{(0)}(\zeta, \mu) &= \mu \frac{e^{-i\left(\mu^2\zeta^2 + \frac{\pi}{4}\right)}}{\sqrt{\pi}} \int_{\mu\zeta}^{\infty} e^{is^2} ds \quad \text{при } \zeta > 0, \\ V^{(0)}(\zeta, \mu) &= \mu \frac{e^{-i\left(\mu^2\zeta^2 + \frac{\pi}{4}\right)}}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\mu\zeta} e^{is^2} ds \quad \text{при } \zeta < 0 \end{aligned}\right\} \tag{68}$$

и
$$V^{(1)}(\zeta, q) = -\frac{e^{-i\frac{\pi}{12}}}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} e^{-t\zeta e^{i\frac{\pi}{6}}} \frac{v'(t) + e^{-i\frac{\pi}{3}} q v(t)}{w_2'(t) + e^{-i\frac{\pi}{3}} q w_2(t)} dt,$$

$$V^{(2)}(\zeta, q) = -\frac{e^{i\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} e^{it\zeta} \frac{v'(t) - qv(t)}{w_1'(t) - qw_1(t)} dt. \tag{69}$$

В формулах (66) мы пренебрегаем членами порядка $1/\mu^2 = 1/\sqrt{Y}$ по сравнению с членами порядка единицы (ср. [18], § 5), поэтому при конечных и больших ζ следует вместо интегралов Френеля (68) использовать первый член их асимптотических разложений и писать

$$V^{(0)}(\zeta, \mu) = V^{(0)}(\zeta, \infty) = -\frac{e^{i\frac{3\pi}{4}}}{2\sqrt{\pi}\zeta}. \tag{70}$$

Тогда функция V_{11} зависит только от двух переменных и превращается в функцию

$$V_{11}(\zeta, q) = V_{11}(\zeta, \infty, q). \tag{71}$$

Зависимость V_{11} от переменной μ проявляется лишь при малых ζ.

В силу соотношений (66) формула (58) дает

$$\left.\begin{aligned}\Gamma &= M\sqrt{\frac{2}{k(\xi-\eta)}}\,e^{ik\xi}V_{11}(\zeta, Y^{1/4}, q) \quad \text{при } \zeta>0,\\ \Gamma &= \Gamma^0 + M\sqrt{\frac{2}{k(\xi-\eta)}}\,e^{ik\xi}V_{11}(\zeta, Y^{1/4}, q) \quad \text{при } \zeta<0,\end{aligned}\right\} \tag{72}$$

где слагаемое

$$\Gamma^0 = e^{i\left(k\xi-\frac{2}{3}Y^{3/2}-\frac{1}{3}z^3+zY\right)} = e^{i\left(k\xi-\frac{1}{3}\zeta^3-\zeta^2\sqrt{Y}\right)} \tag{73}$$

при малых η/a дает падающую волну (57). Действительно,

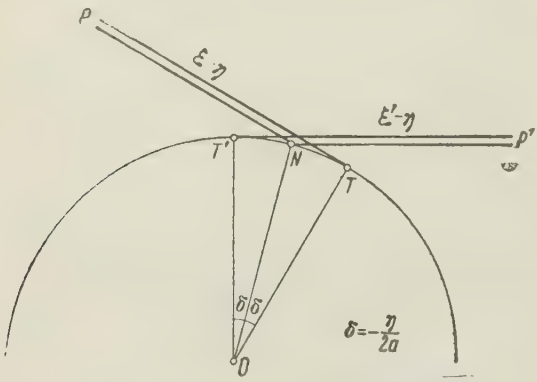


Рис. 5. Отражение лучей и лучевые координаты (для удаленных точек P' и P)

$$-r\cos\varphi = (\xi-\eta)\cos\frac{\eta}{a} + a\sin\frac{\eta}{a}, \tag{74}$$

полагая

$$\cos\frac{\eta}{a} = 1-\frac{\eta^2}{2a^2},$$

$$\sin\frac{\eta}{a} = \frac{\eta}{a}-\frac{\eta^3}{6a^3}, \tag{75}$$

получим

$$-kr\cos\varphi = k\xi - \frac{1}{3}\zeta^3 - \zeta\sqrt{Y}. \tag{76}$$

Фактически не имеет смысла различать Γ^0 и G^0, так что под Γ^0 следует понимать просто падающую волну (57). Отраженная волна равна

$$\Gamma^1 = M\sqrt{\frac{2}{k(\xi-\eta)}}\,e^{ik\xi}V_{11}(\zeta, Y^{1/4}, q) \quad (\text{при } \zeta<0). \tag{77}$$

При больших отрицательных ζ для функции V_{11} справедливо асимптотическое выражение

$$V_{11} = \frac{\sqrt{-\zeta}}{2}e^{-\frac{i}{12}\zeta^3}\frac{-\frac{\zeta}{2}+iq}{-\frac{\zeta}{2}-iq}, \tag{78}$$

которое обеспечивает смыкание формулы (77) с геометрической оптикой, согласно которой должно быть

$$\Gamma^1 = \frac{M^{3/2}}{\sqrt{k(\xi-\eta)}}\,e^{ik(\xi-\eta-2a\sin\delta)}\sqrt{\sin\delta}\,\frac{\sin\delta-g}{\sin\delta+g}, \tag{79}$$

где $\frac{\pi}{2}-\delta$ есть угол отражения данного луча NP ($\delta = -\eta/2a$, см. рис. 5). Вместо двух формул (77) и (79) можно при $\zeta<0$ написать (ср. [16]) одну интерполяционную формулу

$$\Gamma^1 = M\sqrt{\frac{2}{k(\xi-\eta)}}\,e^{ik\left(\xi-\eta+2a\sin\frac{\eta}{2a}\right)}e^{-\frac{i}{12}\zeta^3}V_{11}(\zeta, Y^{1/4}, q), \tag{80}$$

где $\zeta = 2M\sin\frac{\eta}{2a}$, практически совпадающую с (77) при конечных ζ и с (79) при $-\zeta \gg 1$.

Формулы (72), (77), (79) и (80) при $q = 0$ и $q = \infty$, а также при замене $V_{11}(\zeta, Y^{1/4}, q)$ на $V_{11}(\zeta, q)$, эквивалентны выражениям, полученным А. С. Горяиновым [16] иным методом.

Если на цилиндр падает цилиндрическая волна (56), создаваемая удаленным источником, и Y' сравнимо с Y, то следует исходить не из формулы (55), а непосредственно из общей формулы (51). Пользуясь соотношениями между V_{11} и V (см. формулу (49)), установленными в работе В. А. Фока [18] и приведенными в [14], получим

$$\Gamma = M\sqrt{\frac{4\pi}{k^2(\xi'-\eta)(\xi-\eta)}}\,e^{i\left(k\sigma+\frac{\pi}{4}\right)}V_{11}(\zeta,\mu,q), \tag{81}$$

где

$$\zeta = X - \sqrt{Y} - \sqrt{Y'} = M\frac{\eta}{a} > 0, \quad \mu^2 = \frac{\sqrt{YY'}}{\sqrt{Y}+\sqrt{Y'}}. \tag{82}$$

Эта же формула (81) годится для отраженной волны Γ^1 при конечных отрицательных ζ. Можно применять для Γ^1 также интерполяционную формулу.

$$\Gamma^1 = M\sqrt{\frac{4\pi}{k^2(\xi'-\eta)(\xi-\eta)}}\,e^{i\left(k\sigma+\frac{\pi}{4}+2a\sin\frac{\eta}{2a}\right)}e^{-\frac{i}{12}\zeta^3}V_{11}(\zeta,\mu,q), \tag{83}$$

где $\zeta = 2M\sin\frac{\eta}{2a} < 0$, которая дает автоматический переход к геометрической оптике при условии, что ξ и ξ' велики по сравнению с $|\eta|$, так что на рис. 5 можно считать

$$P'T' \parallel P'N \text{ и } TP \parallel NP. \tag{84}$$

Формулы этого параграфа легко интерпретируются с точки зрения дифракционных лучей. Более глубокое толкование дифракционных явлений, описываемых этими формулами, основано на том, что функция $V^{(0)}$ в формуле (67) соответствует дифракции на полубесконечном плоском экране, затеняющем падающую волну так же, как данный цилиндр, а сумма $V^{(1)} + V^{(2)}$ дает дифракционный «фон» — поправку к $V^{(0)}$, зависящую от кривизны и материала цилиндра (ср. [18] и [14]). Разбиение V_{11} на $V^{(0)}$ и $V^{(1)} + V^{(2)}$ физически связано с наличием двух зон «эффективной поперечной диффузии» в данной задаче (ср. [9]).

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Основным результатом данной работы является выражение (51), которое смыкается с формулами геометрической оптики и дает общее решение задачи о дифракции на круговом цилиндре большого радиуса. Этот результат свидетельствует об эффективности параболического уравнения, записанного в лучевых координатах.

ЛИТЕРАТУРА

1. М. А. Леонтович, Изв. АН СССР, Сер. физ., 1944, 8, 1, 16.
2. М. А. Леонтович, В. А. Фок, ЖЭТФ, 1946, 16, 7, 557; Сб. Исследования по распространению радиоволн, под ред. Б. А. Введенского, Изд. АН СССР, 1948, стр. 13—39.
3. В. А. Фок, Изв. АН СССР, Сер. физ., 1946, 10, 2, 171.
4. В. А. Фок, Успехи физ. наук, 1948, 36, 3, 308.
5. Г. Д. Малюжинец, Докл. на Всесоюзном совещании по вопросам электрических колебаний и волн, г. Горький, 1946.
6. Г. Д. Малюжинец, Докл. на IV Всесоюзной акустической конференции, Москва, 1958, Рефераты докладов, Литографированное издание Оргкомитета конференции, ч. II, 1958, стр. 3.
7. Г. Д. Малюжинец, Докл. на III Международной акустической конференции, Штутгарт, 1959.

8. Г. Д. Малюжинец, Докл. на симпозиуме по дифракции волн, Одесса, 1960, Аннотации докладов, Изд. АН СССР, 1960, стр. 7.
9. Г. Д. Малюжинец, Успехи физ. наук, 1959, **69**, 2, 321.
10. Г. Д. Малюжинец, Некоторые обобщения метода отражений в теории дифракции, Автореферат докторск. диссертации, Изд. АН СССР, 1950.
11. F. G. Friedlander, Communs Pure and Appl. Math., 1954, **7**, 4, 705.
12. В. А. Фок, Дифракция радиоволн вокруг земной поверхности, Изд. АН СССР, 1946.
13. В. А. Фок, Изв. АН СССР, Сер. физ., 1950, **14**, 1, 70.
14. П. А. Азрилянт, М. Г. Белкина, Численные результаты теории дифракции радиоволн вокруг земной поверхности, Изд. Советское радио, 1957.
15. М. Г. Белкина, Таблицы для вычисления электромагнитного поля в области тени для различных почв, Изд. Советское радио, 1949.
16. А. С. Горянинов, Радиотехника и электроника, 1958, 3, 5, 603 (см. также Докл. АН СССР, 1956, **109**, 3, 477).
17. J. R. Wait, A. M. Conda, IRE Trans., 1958, **AP-6**, 4, 348.
18. В. А. Фок, Успехи физ. наук, 1950, **43**, 4, 587.
19. Л. А. Вайнштейн, Г. Д. Малюжинец, Радиотехника и электроника, 1961, **6**, 9,.

Акустический институт АН СССР
Институт физических проблем АН СССР

Поступила в редакцию
18 I 1961

ВОЗБУЖДЕНИЕ ВОЛН НА ИМПЕДАНСНОЙ ПЛОСКОСТИ

М. Д. Хаскинд

Исследовано двумерное поле E-волн над импедансной плоскостью, возбуждаемое системой источников, заключенных внутри идеально проводящей цилиндрической поверхности с прорезанными параллельно образующей щелями. Для определения волнового поля установлена обобщенная формула Грина — Кирхгофа. В дальнейшем введена комплексная амплитуда волн, через которую выражаются энергетические характеристики полного поля и поля поверхностных волн.

I. ОБОБЩЕННАЯ ФОРМУЛА ГРИНА—КИРХГОФА И ЭНЕРГЕТИЧЕСКИЕ СООТНОШЕНИЯ

1. Основные уравнения

Рассмотрим импедансную плоскость $z = 0$ и изучим двумерное электромагнитное поле в верхнем полупространстве вне цилиндрической поверхности с поперечным контуром L и образующей, параллельной оси x (рис. 1). Зависимость от времени учитываем при помощи экспоненциально-временно́го множителя $\exp i\omega t$ и используем практическую рационализированную систему единиц.

На импедансной плоскости имеем условие

$$E_y = i\rho_0 Z H_x \text{ при } z = 0 \left(\rho_0 = \left(\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}\right)^{1/2} = 120\pi \text{ ом}\right), \tag{1}$$

в котором для простоты величина Z принимается положительной. В частности, для частой гребенчатой структуры $Z = \operatorname{tg} kl$, где l — высота гребенки; $k = \omega (\varepsilon_0\mu_0)^{1/2}$ — волновое число в свободном пространстве.

Определение электромагнитного поля над плоскостью $z = 0$ проведем при помощи соотношений

$$\mathbf{E} = -ik\rho_0 \operatorname{rot} \boldsymbol{\Pi}_m, \quad \mathbf{H}_m = \operatorname{grad} \operatorname{div} \boldsymbol{\Pi}_m + k^2 \boldsymbol{\Pi}_m,$$

где магнитный вектор Герца $\boldsymbol{\Pi}_m$ ориентируем вдоль оси x, полагая $\Pi_{mx} = \varphi(y, z)$ и $\Pi_{my} = \Pi_{mz} = 0$. В результате этого получим ($\mathbf{x}^0$ — единичный вектор оси x)

$$\mathbf{E} = -ik\rho_0 (\operatorname{grad}\varphi \times \mathbf{x}^0), \quad E_x = 0, \quad E_y = -ik\rho_0 \frac{\partial\varphi}{\partial z}, \quad E_z = ik\rho_0 \frac{\partial\varphi}{\partial y}, \tag{2}$$

$$H_x = k^2\varphi, \quad H_y = H_z = 0.$$

Скалярная функция $\varphi(y, z)$ удовлетворяет волновому уравнению и согласно (1) и (2) граничному условию

$$\frac{\partial\varphi}{\partial z} + p\varphi = 0 \text{ при } z = 0 \ (p = kZ). \tag{3}$$

Примем далее, что система источников находится внутри идеально проводящей цилиндрической поверхности, в которой параллельно образующей прорезаны щели. Тогда на этой поверхности имеем

$$\frac{\partial\varphi}{\partial n} = \frac{1}{ik\rho_0} E_l \text{ на } L, \tag{4}$$

где на идеально проводящих частях касательная составляющая E_l напряженности электрического поля обращается в нуль, а на щелях E_l является заданной функцией или же подлежит определению при «сшивании» внутреннего и внешнего полей. В случае сосредоточенных щелей, к кромкам которых приложены заданные напряжения V_s ($s = 0, 1, \ldots, m$), условие 4) можно выразить через δ-функцию:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial n} = \frac{1}{ik\rho_0} \sum_{s=0}^{m} V_s \delta (l - l_s) \text{ на } L. \tag{5}$$

Каждая сосредоточенная щель возбуждает такое же поле, как и прямолинейный магнитный ток $I_{ms} = -2V_s$. Форма остальной части идеально проводящего контура L сказывается в том, что на его внешней стороне возникают электрические токи, плотность которых равна H_x.

Приведем различные формы для функции источника излучения цилиндрических волн над импедансной плоскостью $z = 0$. С этой целью представим функцию источника $G(y, z, \eta, \zeta)$, помещенного в точку $C(\eta, \zeta)$, в расчлененном виде:

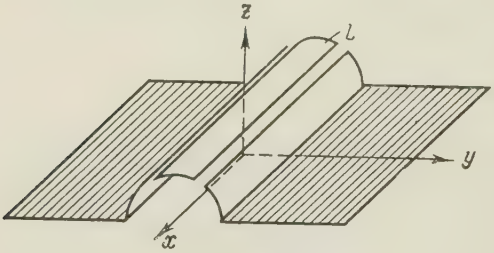


Рис. 1

$$G = G_1 + G_2 + G_3,$$
$$G_1 = H_0^{(2)}(kr_1),$$
$$G_2 = H_0^{(2)}(kr_2), \tag{6}$$
$$(r_1 = ((y - \eta)^2 + (z - \zeta)^2)^{1/2},$$
$$r_2 = ((y - \eta)^2 + (z + \zeta)^2)^{1/2},)$$

Здесь G_1 — функция источника излучения цилиндрических волн в свободном пространстве; функция G_2 определяет зеркально отраженное поле, возникающее при наличии идеально проводящей плоскости $z = 0$, а функция G_3 обусловлена конечным значением импеданса плоскости $z = 0$. Как показано в [1], для функции G_3 имеем два тождественных выражения, отличающихся между собой по внешнему виду:

$$G_3 = \frac{p}{hi}\left(e^{-ihy}\int_{\infty}^{y} e^{-ih\eta_0} F d\eta_0 - e^{-ihy}\int_{-\infty}^{y} e^{ih\eta_0} F d\eta_0\right)$$
$$\left(F = \left(\left(\frac{\partial}{\partial z} - p\right) H_0^{(2)}(kr_2)\right)_{y=\eta_0}\right), \tag{7}$$

$$G_3 = -2pe^{-pz}\int_{-\infty}^{z} e^{p\tau} H_0^{(2)}(kr_2')\, d\tau + \frac{4p}{h} e^{-p(z+\zeta)-ih|y-\eta|}$$
$$(r_2' = (r_2)_{z=\tau}, \quad h^2 = k^2 + p^2), \tag{8}$$

где в формуле (7) интегрирование проводится вдоль полупрямых, параллельных оси y и расположенных выше точки $C^*(\eta, -\zeta)$, а прямолинейный путь интегрирования $(-\infty, z)$ в (8) не содержит этой точки, причем второе слагаемое в (8) определяет возбуждаемое поле поверхностных волн. Отметим также, что выражение для G_3 можно представить при помощи одного лишь контурного интеграла в комплексной плоскости τ. Для этого

статочно временно ввести малое поглощение, т. е. считать $\operatorname{Im} k < 0$, а $p < 0$, $\operatorname{Re} p > 0$; тогда будем иметь [2, 3]

$$G_3 = -2pe^{-ipz} \int_{-i\infty}^{z} e^{p\tau} H_0^{(2)}(kr_2')\, d\tau. \tag{9}$$

сли теперь воспользоваться разложением

$$H_0^{(2)}(kr_2') = \frac{i}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-iw(y-\eta)-u(\tau+\zeta)} \frac{dw}{u} \quad (u = (w^2 - k^2)^{1/2}, \quad \operatorname{Re} u > 0), \tag{10}$$

о выражение (9) можно преобразовать к виду

$$G_3 = \frac{2pi}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-iw(y-\eta)-u(z+\zeta)}}{u(u-ip)}\, dw. \tag{11}$$

В пределе при $\operatorname{Im} k = 0$ точки ветвления $w = \pm k$ становятся действительными, и в соответствии с этим путь интегрирования в (11) следует выбрать обходящим точки ветвления $w = \pm k$ и полюсы $w = \pm h$, как указано на рис. 2.

Рис. 2

Контур интегрирования в (11) преобразуем в интегрирование по мнимой оси в плоскости w. Выполнив далее соответствующую замену переменных, получим

$$G_3 = \frac{2pi}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-iv(z+\zeta)-m|y-\eta|}}{m(iv-p)}\, dv + \frac{4p}{h} e^{-p(z+\zeta)-ph|y-\eta|} \tag{12}$$

$$(m = (v^2 - k^2)^{1/2}, \quad \operatorname{Re} m > 0).$$

Соотношение (12) непосредственно вытекает из (8). В самом деле, подставляя в (8) разложение

$$H_0^{(2)}(kr_2') = \frac{i}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-iv(z+\zeta)-m|y-\eta|} \frac{dv}{m}, \tag{13}$$

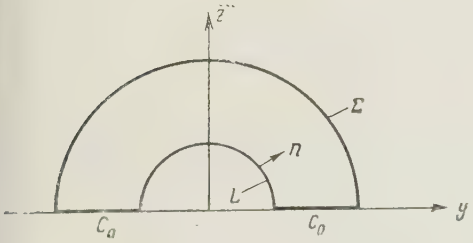


Рис. 3

сразу приходим к (12) и тем самым убеждаемся в тождественности выражений (8) и (9).

Перейдем к установлению обобщенной формулы Грина — Кирхгофа. Применяя для этого к функциям φ и G формулу Грина, найдем

$$\int_{L+\Sigma+C_0} \left(G \frac{\partial \varphi}{\partial n} - \varphi \frac{\partial G}{\partial n}\right) dl + 4i\varphi(y, z) = 0, \tag{14}$$

где Σ — произвольный контур в верхней полуплоскости, охватывающий контур L и опирающийся на ось y; C_0 — свободная часть этой оси между L и Σ (рис. 3). При $z = 0$ функции φ и G удовлетворяют условию (3) и поэтому интегрирование в (14) по C_0 автоматически обращается в нуль. Для трансформации Σ в бесконечно удаленный контур учтем малое поглощение ($\operatorname{Im} k < 0$), обеспечивающее затухание поля в бесконечно удаленных точках. В результате приходим к обобщенной формуле Грина —

Кирхгофа

$$\varphi = \frac{i}{4}\int_L \left(G\frac{\partial\varphi}{\partial n} - \varphi\frac{\partial G}{\partial n}\right)dl, \tag{15}$$

указанной в [1] и применявшейся в несколько иной форме ($k = ik_1$) в [4, 5].

Отметим некоторые общие свойства, вытекающие из (15). Прежде всего при помощи формулы (15) легко выделить поле поверхностных волн. С этой целью рассмотрим только второе слагаемое в (8); тогда получим

$$\varphi = \frac{ip}{h}A(\pm h, p)\,e^{-pz\mp ihy} \text{ при } y \to \pm\infty, \tag{16}$$

$$A(\pm h, p) = \int_L e^{\pm ihy - pz}\left[\frac{\partial\varphi}{\partial n} - \varphi(\pm ih\cos(n, y) - p\cos(n, z))\right]dl, \tag{17}$$

где функции $A(\pm h, p)$ с точностью до множителя iph^{-1} определяют комплексные амплитуды поверхностных волн, расходящихся по обе стороны от контура L. Далее, в соответствии с (6) представим (15) в расчлененной форме:

$$\varphi = \varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3, \quad \varphi_s = \frac{i}{4}\int_L \left(G_s\frac{\partial\varphi}{\partial n} - \varphi\frac{\partial G_s}{\partial n}\right)dl \quad (s = 1, 2, 3). \tag{18}$$

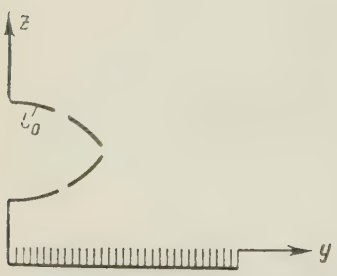


Рис. 4

Если значения функции φ и ее нормальной производной заданы на контуре L, то соотношение (18) имеет такую же трактовку, как и (6), т. е. функция φ_1 определяет поле в свободном пространстве, функция φ_2 характеризует зеркально отраженное поле, появляющееся при наличии идеально проводящей плоскости $z = 0$, и, наконец, функция φ_3 учитывает конечное значение импеданса плоскости $z = 0$. На основании (10) и (11) функции φ_2 и φ_3 выражаются через комплексную амплитуду $A(w, u)$ следующим образом:

$$\varphi_2 = -\frac{1}{4\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-iwy-uz}A(w, u)\frac{dw}{u}, \quad \varphi_3 = -\frac{p}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-iwy-uz}\frac{A(w, u)}{u(u-p)}dw. \tag{19}$$

Кроме того, как следует из (18) и (6), функции φ_1 и φ_2 имеют асимптотику, характерную для цилиндрических волн:

$$\varphi_1 = \frac{iA(k\cos\theta, -ik\sin\theta)}{(8\pi kr)^{1/2}}e^{-i\left(kr-\frac{\pi}{4}\right)}, \quad \varphi_2 = \frac{iA(k\cos\theta, ik\sin\theta)}{(8\pi kr)^{1/2}}e^{-i\left(kr-\frac{\pi}{4}\right)}$$
$$\left(r = (y^2+z^2)^{1/2}, \quad \theta = \operatorname{arctg}\frac{y}{z}\right). \tag{20}$$

Отметим еще случай одностороннего распространения волн. Пусть цилиндрическая поверхность с поперечным контуром L_0 ограждена при $y = 0$ идеально проводящей плоскостью (рис. 4). Тогда на этой плоскости $E_z = ik\rho_0\partial\varphi/\partial y = 0$ и поэтому функция φ из области $y > 0$ продолжается четным образом в область $y < 0$. В связи с этим приходим к рассмотрению поля в верхней полуплоскости вне контура $L = L_0 + L_0^*$, где L_0^* — зеркальное отражение контура L_0 относительно оси z. Учитывая четность функции φ для комплексных амплитуд, находим

$$A(\pm w, u) = 2\int_{L_0} e^{-uz}\left[\left(\frac{\partial\varphi}{\partial n} + u\varphi\cos(n, z)\right)\cos wy + w\varphi\cos(n, y)\sin wy\right]dl. \tag{21}$$

Подобным путем сводится интегрирование по контуру L_0 и в общей формуле 15):

$$\varphi = \frac{i}{4}\int_{L_0}\left(G_0\frac{\partial\varphi}{\partial n} - \varphi\frac{\partial G_0}{\partial n}\right)dl,$$
$$G_0 = G(y, z, \eta, \zeta) + G(y, z, -\eta, \zeta). \qquad (22)$$

2. Энергетические характеристики

Выше установлено, что полное поле над импедансной плоскостью и поле поверхностных волн характеризуются одной функцией $A(\pm w, u)$. Покажем теперь, что через эту же функцию выражаются энергетические характеристики. Для этого вычислим вначале среднюю мощность электромагнитной энергии, переносимой поверхностными волнами через единичный поперечный отрезок при $y \to \pm\infty$, исходя из общей формулы

$$P_\pm = \pm\frac{1}{2}\int_0^\infty \operatorname{Re}(E_z H_x^*)\,dz \text{ при } y \to \pm\infty.$$

Подставляя сюда выражения (2) и (16), получаем простое соотношение

$$P_\pm = \rho_0\frac{pk^3}{4h}|A(\pm h, p)|^2. \qquad (23)$$

С другой стороны, при одностороннем излучении (рис. 4) для полной комплексной мощности имеем равенство

$$P_к = \int_{L_0} E_l H_x^*\,dl = i\rho_0 k^3\int_{L_0}\varphi^*\frac{\partial\varphi}{\partial n}\,dl,$$

которое можно представить в расчлененной форме:

$$P_к = P_{1к} + P_{2к} + P_{3к}, \quad P_{sк} = i\rho_0 k^3\int_{L_0}\varphi_s^*\frac{\partial\varphi}{\partial n}\,dl \quad (s = 1, 2, 3). \qquad (24)$$

При заданных значениях функции φ и ее нормальной производной на L_0 отдельные слагаемые в (24) имеют отмечавшуюся уже трактовку. Воспользовавшись далее выражениями (19), получим для $P_{2к}$ и $P_{3к}$ общие формулы:

$$P_{2к}^* = \rho_0\frac{ik^3}{4\pi}\int_{-\infty}^{\infty} A(w, u)\,B(w, u)\frac{dw}{u}, \quad P_{3к}^* = \rho_0\frac{ik^3 p}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{A(w, u)\,B(w, u)}{u(u-p)}\,dw, \qquad (25)$$

$$B(w, u) = \int_{L_0}\frac{\partial\varphi^*}{\partial n}e^{-iwy-uz}\,dl. \qquad (26)$$

Представим теперь комплексные мощности в обычном виде, полагая $P_{sк} = 2P_{sa} + i2P_{sr}$ $(s = 1, 2, 3)$, где P_{sa} и P_{sr} — соответственно активные и реактивные мощности; тогда для $P_{0a} = P_{1a} + P_{2a}$ имеем

$$P_{0a} = \rho_0\frac{ik^3}{4}\int_{L_0}\left(\psi^*\frac{\partial\varphi}{\partial n} - \psi\frac{\partial\varphi^*}{\partial n}\right)dl, \quad \psi = \varphi_1 + \varphi_2.$$

Функция ψ удовлетворяет условиям

$$\psi = \varphi, \quad \frac{\partial\psi}{\partial n} = \frac{\partial\varphi}{\partial n} \text{ на } L_0, \quad \frac{\partial\psi}{\partial z} = 0 \text{ при } z = 0 \text{ вне } L_0,$$
$$\frac{\partial\psi}{\partial y} = \qquad \text{при } y = 0 \text{ вне } L_0.$$

Вследствие этого предыдущее соотношение принимает вид

$$P_{0a} = \rho_0\frac{ik^3}{4}\int_{L_0}\left(\psi^*\frac{\partial\psi}{\partial n} - \psi\frac{\partial\psi^*}{\partial n}\right)dl,$$

в котором на основании формулы Грина контур L_0 можно трансформировать в четверть окружности большого радиуса r, опирающейся на оси y и z. Выполнив эту трансформацию и учитывая (20), найдем

$$P_{0a} = \frac{\rho_0 k^3}{16\pi} \int_0^{\pi/2} |A_-(k\cos\theta, -ik\sin\theta) + A(k\cos\theta, ik\sin\theta)|^2 d\theta. \quad (27)$$

При двустороннем излучении следует в (24) и (26) контур L_0 заменить контуром L. Соответственно с этим верхний предел интегрирования в (27) заменяется на π.

II. ПРИБЛИЖЕННЫЕ МЕТОДЫ РАСЧЕТА ПОЛЯ ПОВЕРХНОСТНЫХ ВОЛН

На основе первой части данной работы ниже проведено обсуждение приближенных методов определения поля поверхностных волн в различных случаях. Полученные результаты иллюстрируются конкретными вычислениями.

1. Общие соображения

Формулы (15) и (17) позволяют сразу указать общий вид приближенного решения, когда контур L является замкнутым и его геометрический центр имеет достаточную высоту поднятия z_0 над импедансной плоскостью $z = 0$. В самом деле, пусть функция φ_∞ является точным решением в свободном пространстве; тогда в качестве первого приближения можно положить

$$\varphi \simeq \frac{i}{4} \int_L \left(G \frac{\partial \varphi_\infty}{\partial n} - \varphi_\infty \frac{\partial G}{\partial n} \right) dl, \quad (28)$$

$$A_-(\pm w, u) \simeq e^{-uz_0} \int_L e^{\pm iwy - uz} \left[\frac{\partial \varphi_\infty}{\partial n} - \varphi_\infty (\pm iw\cos(n, y) - u\cos(n, z)) \right] dl \quad (29)$$

$$(w = k\,\mathrm{ch}\,\alpha,\ u = k\,\mathrm{sh}\,\alpha),$$

где отсчет ординаты z в (29) ведется от высоты геометрического центра контура L. Очевидно, что это приближение тем точнее, чем выше расположена цилиндрическая поверхность над импедансной плоскостью $z = 0$. Таким образом, точные решения для свободного пространства могут непосредственно быть использованы для приближенных расчетов волнового поля в рассматриваемом случае. Можно, однако, установить еще более тесную связь между φ_∞ и приближенным решением. Действительно, согласно (20) для φ_∞ имеем асимптотику

$$\varphi_\infty = \frac{iQ(k, \theta)}{(8\pi kr)^{1/2}} e^{-i\left(kr - \frac{\pi}{4}\right)}, \quad Q(k, \theta) = \int_L \left(f \frac{\partial \varphi_\infty}{\partial n} - \varphi_\infty \frac{\partial f}{\partial n} \right) dl,$$
$$f = e^{ik(y\cos\theta + z\sin\theta)}, \quad (30)$$

где асимптотическая характеристика $Q(k, \theta)$ определяет диаграмму направленности излучаемых или рассеянных волн в свободном пространстве. Сопоставляя (29) и (30), получаем

$$A(w, u) = e^{-uz_0} Q(k, i\alpha),\ A(-w, u) = e^{-uz_0} Q(k, \pi - i\alpha). \quad (31)$$

В частности, при $\alpha = \alpha_0$, когда $w = h$ и $u = p$, из (31) находим комплексные амплитуды поверхностных волн. Следовательно, для приближенного определения комплексных амплитуд $A(\pm w, u)$ достаточно задать только одну асимптотическую характеристику $Q(k, \theta)$ излучаемых или рассеянных цилиндрических волн в свободном пространстве.

Для иллюстрации общих соображений рассмотрим некоторые частные случаи. Пусть, например, электромагнитное поле возбуждается над импедансной плоскостью $z = 0$ полубесконечным плоским волноводом с иде-

льно проводящими стенками (рис. 5). Тогда для $Q(k, \theta)$ имеем выражение

$$Q(k, \theta) = \int_{-a}^{a} \left(\frac{\partial \varphi_\infty}{\partial y} - ik\cos\theta\varphi_\infty\right) e^{ikz\sin\theta}\, dz -$$

$$- ik\sin\theta \int_{-\infty}^{0} e^{iky\cos\theta} \left(\varphi_\infty(y, a)\, e^{ika\sin\theta} - \varphi_\infty(y, -a)\, e^{-ika\sin\theta}\right) dy. \qquad (32)$$

Первое слагаемое в (32) связано со структурой поля на открытом конце волновода, второе слагаемое обусловлено электрическими токами, затекающими на внешние стенки волновода. Точные значения $Q(k, \theta)$ для разных типов E-волн рассчитаны в [6], где, в частности, показано, что для некоторых типов E-волн можно при вычислении $Q(k, \theta)$ пользоваться методом Кирхгофа, т. е. пренебречь токами, затекающими на внешние стенки волновода, а структуру поля у открытого конца считать такой же, как и в бесконечном плоском волноводе. Используя приближение Кирхгофа, можем положить $\partial\varphi/\partial y = -ih_s\varphi$ при $y = 0$; тогда из (31) и (32) находим

$$A(\pm h, p) = \frac{1}{ik\rho_0} e^{-pz_0}\left(1 \pm \frac{h}{h_s}\right) \int_{-a}^{a} E_s(z)\, e^{-pz}\, dz, \qquad (33)$$

где h_s — постоянная распространения в волноводе; $E_s(z)$ — значение составляющей E_z напряженности электрического поля для данного типа E-волн в волноводе.

Очевидно, что приближение Кирхгофа может быть использовано в самом общем случае для произвольной формы контура L, считая на щелях $\partial\varphi_\infty/\partial n = -ih_s\varphi_\infty$ и пренебрегая затекающими точками на идеально проводящих частях этого контура. При этом, как и обычно, это приближение тем точнее, чем больше ширина щелей по сравнению с длиной волны в свободном пространстве. Во всех случаях при использовании точного или приближенного решения φ_∞ необходимо, чтобы искажения поля вблизи контура L, обусловленные импедансной плоскостью, были слабыми, что возможно при достаточной высоте поднятия z_0 геометрического центра контура L_0.

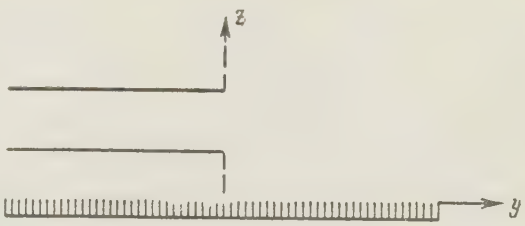


Рис. 5

Рассмотрим теперь другой пример. Предположим, что поверхностные волны возникают на импедансной плоскости в результате дифракции нормально падающих плоских волн на идеально проводящий цилиндр (H-поляризация). Выделим из полного поля падающие и отраженные от импедансной плоскости волны:

$$\varphi_0 = e^{ikz_0\sin\beta}\varphi_{01} + Re^{-ikz_0\sin\beta}\varphi_{02}, \quad R = \frac{ik\sin\beta + p}{ik\sin\beta - p},$$
$$\varphi_{01} = e^{-ik(y\cos\beta - z\sin\beta)}, \quad \varphi_{02} = e^{-ik(y\cos\beta + z\sin\beta)} \qquad (34)$$

где β — угол возвышения; R — коэффициент отражения, а отсчет ординаты z, как и раньше, ведется от высоты поднятия z_0 геометрического центра контура L.

Очевидно, что функцию φ_∞ можно представить в расчлененном виде:

$$\varphi_\infty = e^{ikz_0\sin\beta}\varphi_1 + Re^{-ikz_0\sin\beta}\varphi_2, \qquad (35)$$

где функции φ_1 и φ_2 удовлетворяют граничным условиям

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial n} = -\frac{\partial \varphi_{01}}{\partial n}, \quad \frac{\partial \varphi_2}{\partial n} = -\frac{\partial \varphi_{02}}{\partial n} \text{ на } L. \tag{36}$$

В соответствии с (30), (31) и (35) находим

$$A(w, u) = e^{(ik\sin\beta - u)z_0} Q_1(k, i\alpha) + Re^{-(ik\sin\beta + u)z_0} Q_2(k, i\alpha), \tag{37}$$
$$A(-w, u) = e^{(ik\sin\beta - u)z_0} Q_1(k, \pi - i\alpha) + Re^{-(ik\sin\beta + u)z_0} Q_2(k, \pi - i\alpha),$$
$$Q_{1,2}(k, \theta) = \int_L \left(f\frac{\partial \varphi_{1,2}}{\partial n} - \varphi_{1,2}\frac{\partial f}{\partial n}\right) dl.$$

Выражения (37) принимают особенно простой вид для кругового цилиндра. В этом случае $Q_1(k, 0) = Q_0(k, \theta + \beta)$ и $Q_2(k, 0) = Q_0(k, 0 - \beta)$, где $Q_0(k, 0)$ — асимптотическая характеристика волн, рассеянных от кругового цилиндра в результате дифракции плоских волн, падающих вдоль полярной оси. Далее, если положить $\beta = i\alpha_0$, т. е. когда $k \operatorname{ch} \alpha_0 = h$, $k \operatorname{sh} \alpha_0 = p$ и $R = 0$, то падающая волна превращается в поверхностную, и в этом случае для кругового цилиндра имеем

$$A(w, u) = e^{-(u+p)z_0} Q_0(k, i(\alpha, +\alpha_0)), \quad A(-w, u) = e^{-(u+p)z_0} Q_0(k, \pi + i(\alpha_0 - \alpha)). \tag{38}$$

В частности, для комплексных амплитуд $A(\pm h, p)$ поверхностных волн ($\alpha = \alpha_0$) получаем интересный результат:

$$A(h, p) = e^{-2pz_0} Q_0(k, 2i\alpha_0), \; A(-h, p) = e^{-2pz_0} Q_0(k, \pi). \tag{39}$$

Отсюда видно, что комплексная амплитуда $A(-h, p)$ отраженных поверхностных волн с точностью до множителя $\exp(-2pz_0)$ совпадает с асимптотической характеристикой $Q_0(k, \pi)$ обратного рассеяния при нормальном падении H-поляризованных плоских однородных волн на круговой цилиндр в свободном пространстве.

2. Щелевое и волноводное возбуждение поверхностных волн

Рассмотрим ряд примеров, для которых определение волнового поля можно осуществить иным путем. Пусть имеем щель в идеально проводящей вертикальной плоскости, опирающейся на импедансную плоскость $z = 0$ (рис. 6). В данном случае $E_z = ik\rho_0 \partial\varphi/\partial y \neq 0$ в промежутке (z_1, z_2) оси z при $y = +0$, где z_1 и z_2 — ординаты кромок щели. Из общих формул (21), (22) и (26) сразу находим

Рис. 6

$$\varphi = \frac{1}{2k\rho_0}\int_{z_1}^{z_2} E_z(\zeta)\, G(y, z, 0, \zeta)\, d\zeta, \tag{40}$$

$$A(\pm w, u) = \frac{2}{ik\rho_0}\int_{z_1}^{z_2} E_z(z)\, e^{-uz}\, dz,$$

$$B(w, u) = -\frac{1}{ik\rho_0}\int_{z_1}^{z_2} E_z^*(z)\, e^{-uz}\, dz. \tag{41}$$

Отсюда видно, что возбуждаемое электромагнитное поле и его энергетические характеристики можно полностью определить, если задана функция $E_z(z)$. В частности, для сосредоточенной щели $E_z = V_0\delta(z - z_0)$ и тогда предыдущие формулы упрощаются:

$$\varphi = \frac{V_0}{2k\rho_0} G(y, z, 0, z_0), \quad A(\pm w, u) = \frac{2V_0}{ik\rho_0} e^{-uz_0}, \quad B(w, u) = -\frac{V_0^*}{ik\rho_0} e^{-uz_0}. \tag{42}$$

Проведем вычисление энергетических характеристик в этом простейшем случае. Прежде всего, в силу (23), для средней мощности и проводи-

ости излучения поверхностных волн получаем

$$P_{\pm} = \frac{kp}{\rho_0 h} |V_0|^2 e^{-2pz_0}, \quad g_0 = \frac{2P_{\pm}}{|V_0|^2} = \frac{2kp}{\rho_0 h} e^{-2pz_0}. \tag{43}$$

алее на основании (10) и (25) находим

$$g_{2к} = \frac{P_{2к}}{|V_0|^2} = \frac{k}{2\rho_0} H_0^{(1)}(\nu) \quad (\nu = 2kz_0), \tag{44}$$

де $g_{2к}$ — дополнительная комплексная проводимость, появляющаяся ри наличии идеально проводящей плоскости $z = 0$. Точно так же из (27) егко найти

$$g_{0a} = \frac{2P_{0a}}{|V_0|^2} = \frac{k}{2\rho_0}(1 + J_0(\nu)). \tag{45}$$

десь $g_0^{\text{а}}$ — активная проводимость излучения сосредоточенной щели ад идеально проводящей плоскостью, причем первое слагаемое соответствует активной проводимости в свободном пространстве, а вторая часть ктивной проводимости, как и должно быть, вытекает из (44). Подставляя перь значения A и B из (42) во вторую из формул (25), приходим к выражению для третьей части комплексной проводимости

$$g_{3к}^{*} = \frac{P_{3к}^{*}}{|V_0|^2} = \frac{2ikp}{\rho_0 \pi} \int_0^{\infty} \frac{e^{-2uz_0}}{u(u-p)}\, dw \quad (u = (w^2 - k^2)^{1/2}).$$

ассмотрим в отдельности участки интегрирования $(0, k)$ и (k, ∞). На ервом участке $u = i(k^2 - w^2)^{1/2}$, а на втором участке точка $w = h$ является полюсом, обходимым сверху. Поэтому, полагая на первом участке $= k \sin\theta$ и обходя затем указанный полюс, можем выражение для $g_{3к}$ редставить в форме

$$g_{3к} = g_0 - \frac{2k}{\rho_0 \pi} Z \int_0^{\pi/2} \frac{e^{i\nu\cos\theta}}{Z + i\cos\theta}\, d\theta - \frac{2ikp}{\rho_0 \pi} \int_0^{\infty} \frac{e^{-2uz_0}}{u - p} \frac{du}{w}$$
$$(Z = p/k, \quad w = (k^2 + u^2)^{1/2}), \tag{46}$$

де g_0 — проводимость излучения поверхностных волн, определяемая формулой (43); во втором интеграле (46) рассматривается его главное значение в смысле Коши. Легко видеть, что активная часть проводимости $_a = \operatorname{Re} g_{3к}$ определяется соотношением

$$g_{3a} = g_0 - \frac{kZ}{2\rho_0 \pi} \int_0^{2\pi} \frac{e^{i\nu\cos\theta}}{Z + i\cos\theta}\, d\theta.$$

олагая здесь $i \exp i\theta = t$, приходим к контурному интегралу по единичной окружности в комплексной плоскости t, обходимой против хода асовой стрелки. Приняв еще во внимание известное равенство (l — замкнутый контур, охватывающий точку $t = 0$)

$$\int_l t^{n-1} \exp\frac{\nu}{2}\left(t - \frac{1}{t}\right) dt = 2\pi i(-1)^n J_n(\nu),$$

олучим выражение

$$g_{3a} = g_0 - \frac{kp}{\rho_0 h}\left(J_0(\nu) + 2\sum_{n=1}^{\infty} t_1^n J_n(\nu)\right) \quad (t_1 = (Z^2 + 1)^{1/2} - Z). \tag{47}$$

Таким образом, из (45) и (47) для полной активной проводимости имеем

$$g_a = \frac{k}{2\rho_0}\left[1 + J_0(\nu) + \frac{4p}{h} e^{-2pz_0} - \frac{2p}{h}\left(J_0(\nu) + 2\sum_{n=1}^{\infty} t_1^n J_n(\nu)\right)\right]. \tag{48}$$

Формула (48) удобна для расчетов при умеренных значениях $\nu = 2kz_0$. В частности, при $\nu \ll 1$ из (48) видно, что $g_a \simeq k_0^{-1}(1 + ph^{-1})$, и в этом случае $g_0/g_a \simeq 2ph^{-1}(1 + ph^{-1})^{-1}$. При $\nu \gg 1$ возбуждение поверхностных волн является слабым. Соответствующую оценку можно получить при помощи метода установившихся фаз, согласно которому

$$\int_0^{\pi/2} \frac{e^{i\nu\cos\theta}}{Z + i\cos\theta}\, d\theta = \left(\frac{\pi}{2\nu}\right)^{1/2} \frac{e^{i\left(\nu - \frac{\pi}{4}\right)}}{Z + i},$$

и поэтому при $\nu \gg 1$ из (45) и (46) имеем

$$g_a = g_0 + \frac{k}{2\rho_0}\left(1 + \left(\frac{2}{\pi\nu}\right)^{1/2}\cos\left(\nu - \frac{\pi}{4}\right)\right) - \\ - \left(\frac{2}{\pi\nu}\right)^{1/2}\frac{kZ}{\rho_0(Z^2+1)}\left(Z\cos\left(\nu - \frac{\pi}{4}\right) + \sin\left(\nu - \frac{\pi}{4}\right)\right). \tag{49}$$

Как видно из (40) и (41), переход к соотношениям (42) для сосредоточенной щели возможен при одновременном выполнении условий $kb \ll 1$ и $pb \ll 1$, где $b = z_2 - z_1$ — ширина щели. Учет конечных размеров щели требует детального рассмотрения поля при $y < 0$ и последующего сшивания в промежутке (z_1, z_2) оси z. Предположим, что щель представляет собой открытый конец плоского волновода, нижняя граница которого является импедансной плоскостью с характеристическим числом $p_1 = kZ_1 > 0$, а верхняя граница — идеально проводящая плоскость (рис. 7). Функции $\varphi_\pm(y, z)$, определяющие поля при $y > 0$ и $y < 0$, удовлетворяют условиям непрерывности в точках щели

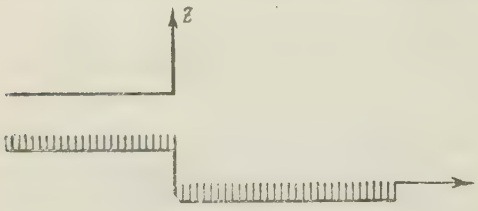


Рис. 7

$$\frac{\partial\varphi_-}{\partial y} = \frac{\partial\varphi_+}{\partial y}, \quad \varphi_- = \varphi_+. \tag{50}$$

Вследствие этого характеристики поля при $y > 0$ можно определить по формулам (40) и (41) в следующем виде:

$$\varphi_+ = \frac{i}{2}\int_{z_1}^{z_2} \frac{\partial\varphi_-}{\partial y} G(y, z, 0, \zeta)\, d\zeta, \tag{51}$$

$$A(\pm w, u) = 2\int_{z_1}^{z_2} \frac{\partial\varphi_-}{\partial y} e^{-uz}\, dz,$$

$$B(w, u) = \int_{z_1}^{z_2} \frac{\partial\varphi_-}{\partial y} e^{-uz}\, dz. \tag{52}$$

Внутри волновода при $y < 0$ поле характеризуется системой волн

$$\varphi_n(y, z) = \psi_n(z)\, e^{\pm ih_n y}, \quad h_n = (k^2 - q_n^2)^{1/2}, \quad \psi_n(z) = \cos q_n(z - z_2), \tag{53}$$

где q_n — корни уравнения $q_n \operatorname{tg} q_n b = -p_1$ ($(2n-1)\pi/2 < q_n b < n\pi$, $n = 1, 2, \ldots$), причем $q_0 = ip_0$; p_0 — положительный корень уравнения $p_0 \operatorname{th} p_0 b = p_1$, которому соответствует медленная волна с постоянной распространения h_0. Отметим еще, что при $p_1 = 0$, т. е. когда граница $z = z_1$ — идеально проводящая плоскость, имеем обычный плоский волновод и здесь уже $p_0 = 0$ ($h_0 = k$) и все $q_n b = n\pi$ ($n = 1, 2, \ldots$).

Следовательно, в строгой постановке поле в волноводе задается в виде

$$\varphi_- = \psi_s(z)\, e^{-ih_s y} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n \psi_n(z)\, e^{ih_n y}, \tag{54}$$

где первое слагаемое определяет падающую волну ($k > q_s$), а второе слагаемое представляет собой сумму отраженных волн вместе с экспоненциально затухающей частью поля. Из (54) получаем при $y = 0$ значения

$$\varphi_- = \psi_s(z) + \sum_{n=0}^{\infty} a_n \psi_n(z), \quad \frac{\partial \varphi_-}{\partial y} = -ih_s \psi_s(z) + i \sum_{n=0}^{\infty} h_n a_n \psi_n(z). \tag{55}$$

Подставляя второе из этих выражений в (51) и затем используя граничное условие (50), а также ортогональность функций $\psi_n(z)$, получим бесконечную систему уравнений для определения коэффициентов a_n.

Такой путь построения точного решения является громоздким, так как, во-первых, при использовании второго из условий (50) требуется выполнить сложные вычисления коэффициентов разложения по функциям $\psi_n(z)$ и, во-вторых, необходим анализ разрешимости получаемой бесконечной системы уравнений для определения коэффициентов a_n. Учитывая эти особенности, отметим только некоторые предельные случаи. Прежде всего для широкой щели ($kb \gg 1$) можно в рамках приближения Кирхгофа пренебречь эффектом отражения и, следовательно, положить $\partial\varphi_-/\partial y \simeq -ih_s\psi_s(z)$ при $y = 0$. Подставляя это выражение в (52), получаем возможность приближенно рассчитать комплексную амплитуду возбуждаемых поверхностных волн вместе с энергетическими характеристиками полного электромагнитного поля. Очевидно, в этом приближении второе из условий (50) не может быть удовлетворено в строгой форме. Поэтому точность данного приближения связана не только с условием $kb \gg 1$, а также с достаточной высотой поднятия центра щели $z_0 = (z_1 + z_2)/2$ над импедансной плоскостью с тем, чтобы искажения поля в точках щели, обусловленные этой плоскостью, были малыми.

Пусть теперь kb мало, точнее $kb < \pi/2$ при $p_1 \neq 0$ или $kb < \pi$ при $p_1 = 0$. В этом случае все h_n ($n = 1, 2, \ldots$) чисто мнимы и падающая и отраженная волны соответствуют значению $s = 0$. Пренебрегая в (54) экспоненциально затухающей частью поля, получаем при $y = 0$ приближенные выражения

$$\varphi_- \simeq (1 + a_0)\psi_0(z), \quad \frac{\partial \varphi_-}{\partial y} \simeq -ih_0(1 - a_0)\psi_0(z). \tag{56}$$

Подставляя второе из выражений (56) в (51) и (52), будем иметь

$$\varphi_+(y, z) \simeq \frac{h_0}{2}(1 - a_0)\int_{z_1}^{z_2} \psi_0(\zeta)\, G(y, z, 0, \zeta)\, d\zeta, \tag{57}$$

$$A(\pm w, u) \simeq -2ih_0(1 - a_0)\int_{z_1}^{z_2} \psi_0(z)\, e^{-uz}\, dz,$$

$$B(w, u) \simeq ih_0(1 - a_0)\int_{z_1}^{z_2} \psi_0(z)\, e^{-uz}\, dz, \tag{58}$$

причем второе из условий (50) может быть удовлетворено только в среднем, что приводит к приближенному значению для коэффициента отражения a_0. Последний можно также определить при помощи энергетических соображений или же для узкой щели ($kb \ll 1$) потребовать выполнения второго из условий (50) в точке $z = z_0$.

Для выяснения отличия приближений (57) и (58) от результатов для сосредоточенной щели вычислим проводимости излучения поверхностных волн в простейшем случае $p_1 = 0$, т. е. когда $\psi_0(z) = 1$ и $h_0 = k$. Из (58) находим

$$A(\pm h, p) = \frac{2V_0}{ik\rho_0} e^{-pz_0} \frac{\operatorname{sh}(pb/2)}{pb/2}, \quad V_0 = \int_{z_1}^{z_2} E_z dz = \rho_0 k^2 (1 - a_0) b, \tag{59}$$

где значение V_0 можно рассматривать как напряжение, приложенное к кромкам щели. Используя теперь (23), получаем следующее выражение для проводимости излучения поверхностных волн:

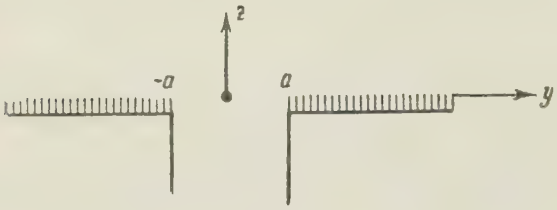


Рис. 8

$$g_0 = \frac{2P_{\pm}}{|V_0|^2} = \frac{2kp}{\rho_0 h} e^{-2pz_0} \left(\frac{\operatorname{sh}(pb/2)}{pb/2} \right)^2. \tag{60}$$

Сопоставление (43) и (60) еще раз показывает, что для перехода к сосредоточенной щели необходимо удовлетворить условие $pb \ll 1$. Вместе с тем приближенное выражение (60), полученное при $kb < \pi$ ($p_1 = 0$), указывает на увеличение проводимости по сравнению с проводимостью сосредоточенной щели.

Пусть теперь источники распределены на отрезке $(-a, a)$ оси y; тогда, стягивая в (17) контур L к этому отрезку, будем иметь

$$A(\pm h, p) = \int_{-a}^{a} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z} + p\varphi \right) e^{\pm ihv} dy. \tag{61}$$

Если отрезок $(-a, a)$ представляет собой открытый конец плоского волновода (рис. 8), то при $kb \gg 1$ можно поступить так же, как и раньше, а именно при $y = 0$ положить

$$\frac{\partial \varphi}{\partial z} + p\varphi = -\frac{1}{ik\rho_0} \left(1 + \frac{p_i}{h_s} \right) E_s, \quad E_s = E_0 \cos q_s (y - a) \tag{62}$$

и таким образом приближенно рассчитать поле поверхностных волн. Очевидно, это приближение обладает меньшей точностью по сравнению с ранее рассмотренным, поскольку в окрестности точек $y = \pm a$ может иметь место заметное искажение поля, обусловленное импедансной плоскостью.

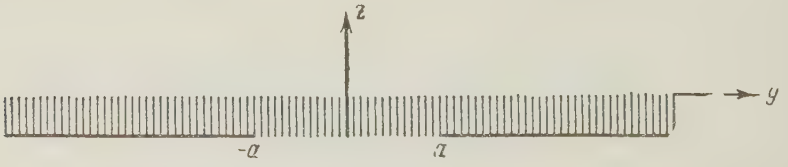


Рис. 9

Другой вариант возбуждения поверхностных волн указан на рис. 9. Здесь импедансная плоскость реализуется при помощи гребенчатой структуры с открытым участком $(-a, a)$, на котором приложено заданное поле $E_y = E_s(y)$ при $z = -l$. Принимая, как и обычно, что поле в канавках при $-l < z < 0$ характеризуется функцией $\varphi_i = C_1 \exp ikz + C_2 \exp(-ikz)$, нетрудно установить

$$\frac{\partial \varphi}{\partial z} + p\varphi = \frac{i}{k\rho_0} \sec kl \, E_s \quad \text{при } z = 0, \ |y| < a.$$

Очевидно, что для обоих вариантов возбуждения будем иметь однотипные выражения для амплитуд поверхностных волн.

В случае же когда отрезок $(-a, a)$ является идеально проводящим и содержащим в точках y_s $(s = 0, 1, \ldots, m)$ сосредоточенные щели (рис. 10), соотношение (61) принимает вид

$$A(\pm h, p) = -\frac{1}{ik\rho_0}\sum_{s=0}^{m} V_s e^{\pm ihy_s} + p\int_{-a}^{a} \varphi e^{\pm ihy}\,dy, \tag{63}$$

в котором значения функции φ на отрезке $(-a, a)$ в точности неизвестны, однако в качестве первого приближения можно положить

$$\varphi \simeq \varphi_0 = -\frac{1}{2k\rho_0}\sum_{s=0}^{m} V_s H_0^{(2)}\left(k\left((y-y_s)^2 + z^2\right)^{1/2}\right). \tag{64}$$

Это приближение как бы «не замечает» импедансной плоскости, начинающейся с $y = \pm a$, и может быть использовано в зоне расположения

Рис. 10

щелей при условии, что крайние щели сравнительно далеко отстоят от точек $y = \pm a$. Для иллюстрации рассмотрим одиночную сосредоточенную щель в точке $y_0 = 0$. Тогда из (63) и (64) находим ($\alpha = ha$, $\beta_0 = k/h$)

$$A(\pm h, p) = -\frac{V_0}{ik\rho_0}\left(1 + i\left(1-\beta_0^2\right)^{1/2} H_c(\beta_0, \alpha)\right),$$

$$H_c(\beta_0, \alpha) = \int_0^{\alpha} \cos t H_0^{(2)}(\beta_0, t)\,dt. \tag{65}$$

Здесь β_0 — коэффициент замедления, а функция $H_c(\beta_0, \alpha)$ протабулирована [7]. На основании (23) получаем выражение для проводимости двустороннего излучения поверхностных волн

$$g_0 = \frac{k}{\rho_0}\left(1-\beta_0^2\right)^{1/2}\left|1 + i\left(1-\beta_0^2\right)^{1/2} H_c(\beta_0, \alpha)\right|^2. \tag{66}$$

При этом $H_c(\beta_0, \infty) = i\left(1-\beta_0^2\right)^{-1/2}$ и поэтому, как и должно быть, $g_0 = 0$ при $\alpha = \infty$.

Для более строгого рассмотрения краевого эффекта укажем точное решение этой задачи в частном случае, когда щель расположена в точке $y = -y_0$ идеально проводящего полубесконечного участка $(-\infty, 0)$ оси y, где второй полубесконечный участок $(0, \infty)$ является импедансным. Представим функцию φ в расчлененном виде:

$$\varphi = \varphi_0 + \psi, \qquad \varphi_0 = -\frac{V_0}{2k\rho_0} H_0^{(2)}\left(k\left((y+y_0)^2 + z^2\right)^{1/2}\right). \tag{67}$$

Тогда на основании (3) $(y > 0)$ и условия $\partial\varphi/\partial z = 0$ при $z = 0$ и $y < 0$ $(y \neq -y_0)$ получаем соотношения

$$\frac{\partial\psi}{\partial z} = 0 \text{ при } z = 0,\ y < 0, \quad \frac{\partial\psi}{\partial z} + p\psi = \frac{pV_0}{2k\rho_0} H_0^{(2)}\left(k(y+y_0)\right) \text{ при } z = 0,\ y > 0.$$

Подставив сюда разложение функции $\psi(y, z)$ по плоским волнам:

$$\psi(y, z) = \int_{-\infty}^{\infty} \Gamma(w)\, e^{-iwy - uz}\, \frac{dw}{u} \qquad (u = (w^2 - k^2)^{1/2},\ \operatorname{Re} u > 0) \tag{68}$$

и используя интегральное представление для функции $H_0^{(2)}(x)$, приходим к уравнениям

$$\int_{-\infty}^{\infty} \Gamma(w)\, e^{-iwy}\, dw = 0 \quad \text{при } y < 0, \tag{69}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{p}{u} - 1\right) \Gamma(w)\, e^{-iwy}\, dw = -\frac{pV_0}{\pi i k \rho_0} \int_0^{\infty} e^{-ik(y + y_0)\operatorname{ch} t}\, dt \quad \text{при } y > 0\ (\operatorname{Im} k < 0). \tag{70}$$

Теория такого вида уравнений [8—12] основана на факторизации выражения $p/u - 1 = f_+(w)\, f_-(w)$, где функция $f_+(w)$ регулярна и не имеет нулей в верхней полуплоскости ($\operatorname{Im} w \geqslant 0$), а функция $f_-(w)$ регулярна и не имеет нулей в нижней полуплоскости ($\operatorname{Im} w \leqslant 0$). Эти функции известны [12], и для простейшей правой части $v = r \exp(-isy)$ ($\operatorname{Im} s < 0$) решение определяется в форме

$$\Gamma_s(w) = -\frac{r}{2\pi i} \frac{1}{f_-(s)\, f_+(w)\, (w - s)},$$

а для правой части, представленной в (70), необходимо произвести суммирование; в результате находим

$$\Gamma(w) = -\frac{pV_0}{2\pi^2 k \rho_0 f_+(w)} \int_0^{\infty} \frac{e^{-ky_0 \operatorname{ch} t}}{f_-(k \operatorname{ch} t)\, (w - k \operatorname{ch} t)}. \tag{71}$$

Формулы (67), (68) и (71) дают точное решение данной задачи, причем выделение вычета в точке $f_+(w) = 0$ определяет возбуждаемое поле поверхностных волн при $y \to \infty$.

ЛИТЕРАТУРА

1. М. Д. Хаскинд, Распространение звуковых и электромагнитных волн в полупространстве, Акуст. ж., 1959, 5, 4, 464.
2. Г. Д. Малюжинец, Об одном обобщении формулы Вейля для волнового поля над поглощающей плоскостью, Докл. АН СССР (новая серия), 1948, 60, 3, 367.
3. М. Д. Хаскинд, Возбуждение поверхностных электромагнитных волн на плоских диэлектрических покрытиях, Радиотехника и электроника, 1960, 5, 2, 188.
4. М. Д. Хаскинд, Приближенные методы определения гидродинамических характеристик качки, Изв. АН СССР, Отд. техн. н., 1954, 11, 66.
5. М. Д. Хаскинд, Возмущающие силы и заливаемость судов на волнении, Изв. АН СССР, Отд. техн. н., 1957, 7, 65.
6. Л. А. Вайнштейн, Дифракция электромагнитных и звуковых волн на открытом конце волновода, Изд. Советское радио, 1953.
7. L. Schwartz, Untersuchung einiger mit Zylinderfuctionen nullter Ordnung Verwandter Funktionen, Luftfahrtforschung, 1943, 20.
8. N. Wiener, E. Hopf, Über eine Klasse singulärer Integralgleichungen, Sitz Berlin. Akad. Wiss., 1931, 696—706.
9. Е. Титчмарш, Введение в теорию интегралов Фурье, ГТИ, 1948, 429—432.
10. В. А. Фок, О некоторых интегральных уравнениях математической физики. Матем. сб., 1944, 14, 1.
11. В. И. Смирнов, Курс высшей математики, 4, ГТИ, 1951, 179—188.
12. Г. А. Гринберг, В. А. Фок, К теорию береговой рефракции электромагнитных волн, Исследования по распространению радиоволн, сб. 2, Изд. АН СССР, 1948, 69.

Поступила в редакцию
16 XI 1960

РАДИОТЕХНИКА И ЭЛЕКТРОНИКА

1961 № 8

О ДИФРАКЦИИ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН НА ВОГНУТОЙ ПОВЕРХНОСТИ КРУГОВОГО ЦИЛИНДРА

Б. Е. Кинбер

Дифракция краевой волны Зоммерфельда на вогнутой поверхности зеркала приводит к многократным отражениям этой волны и появлению волн «шепчущей галереи». В статье эти эффекты исследованы на модели, составленной из нити тока, помещаемой внутри краевого цилиндра. Введение многолистности позволяет удовлетворить условию излучения. Исследованы закономерности геометрической оптики, поле вблизи каустики волны шепчущей галереи.

ВВЕДЕНИЕ

Известные в настоящее время решения дифракционных задач относятся в подавляющем большинстве к выпуклым телам [1, 2]. В пределе при $\lambda \to 0$ они переходят в решения геометрической оптики, которая дает в этих случаях однократно отражающиеся и расходящиеся пучки лучей. Между тем известно [3, 4], что дифракция на вогнутых телах дает ряд качественно новых эффектов: каустические поверхности поля, многократные отражения, эффект шепчущей галереи и т. д.

Исследованные случаи дифракции на вогнутых телах — параболическом цилиндре [5] и параболоиде вращения [6] — при возбуждении из фокуса не характерны, так как в пределе дают одно отражение. Особенности дифракции на вогнутом теле проявляются всегда, когда источник расположен вблизи стенки и решение геометрической оптики дает многократные отражения.

Анализ дифракционных эффектов усложняется тем, что из-за технических трудностей вычисления удается провести лишь для тел простейшей формы, среди которых вогнутой поверхностью обладают только замкнутые полости (внутренняя поверхность цилиндра, сферы, эллипсоида и т. д.).

Возбуждение замкнутого объема источником, помещенным внутри него, приводит к появлению в объеме стоячих, а не бегущих волн, характерных для внешней задачи теории дифракции.

В работе [2] волны, многократно обегающие поверхность цилиндра, формально рассматриваются расположенными не на обычной, а на римановой плоскости. С такой точки зрения волна, возбужденная источником, обегая начало координат, никогда больше не возвращается к месту возбуждения.

Если применить этот прием для внутренних задач, можно считать, что поле, возбуждаемое источником, расположенным внутри замкнутого объема, удовлетворяет принципу излучения. Однако при этом интересующее нас дифракционное поле должно рассматриваться на каждом листе отдельно.

В настоящей работе рассмотрена простейшая задача дифракции на вогнутой поверхности — внутренней поверхности кругового цилиндра. Источником поля является нить тока. Эта задача может рассматриваться также как предельный случай бесконечно тонкого спирального волновода прямоугольного сечения при нулевом радиусе кривизны внутренней стенки и нулевом шаге спирали. Для решения вводится система

нормальных волн, бегущих по направлению $\pm\varphi$. Эта система волн эквивалентна системе волноводных волн для спиральных волноводов. Далее строится функция Грина задачи. Анализ полученного решения позволяет описать многократные отражения краевой волны, поле вблизи каустик и эффект шепчущей галереи на вогнутой поверхности цилиндрического зеркала конечного размера.

1. СОБСТВЕННЫЕ ФУНКЦИИ ЗАДАЧИ

Определим собственные функции волнового уравнения

$$\Delta U + k^2 U = 0, \tag{1}$$

где U — потенциал Герца *, для внутренней области кругового цилиндра радиуса a, расположенного на бесконечнолистной плоскости при обычных граничных условиях

$$U = 0, \tag{2}$$

$$\frac{\partial U}{\partial r} = 0. \tag{3}$$

Вводя цилиндрические координаты r, φ и разделяя переменные, получим

$$\Phi'' + \nu^2 \Phi = 0, \tag{4}$$

$$(kr)^2 Z'' + (kr)\, Z' + [(kr)^2 - \nu^2]\, Z = 0, \tag{5}$$

$$U = \Phi(\varphi)\, Z(kr), \tag{6}$$

где ν — постоянная разделения.

Собственные функции и собственные значения ν_s определяются как решения (5) при граничных условиях (2) или (3).

Рассмотрим вначале решение (5) $Z_\nu = \alpha J_\nu(kr) + \beta J_{-\nu}(kr)$ (для однозначности $\operatorname{Re}\nu > 0$) задачи о поле между двумя соосными цилиндрами радиусов a и b, а затем перейдем к пределу $b \to 0$. Это приводит к уравнению

$$J_\nu(ka) J_{-\nu}(kb) - J_{-\nu}(ka) J_\nu(kb) = 0$$

при граничном условии (2) и к уравнению

$$J'_\nu(ka) J'_{-\nu}(kb) - J'_{-\nu}(ka) J'_\nu(kb) = 0$$

при граничном условии (3).

Переходя к пределу $b \to 0$ и учитывая, что при $x \ll 1$ $J_m(x) \sim x^m$, получим, что собственные значения ν_s определяются соответственно как корни уравнений

$$J_\nu(ka) = 0, \tag{7}$$

$$J'_\nu(ka) = 0 \tag{8}$$

при граничных условиях (2) и (3) и дополнительном условии $\operatorname{Re}\nu > 0$.

Уравнение (7) или (8) при $\operatorname{Re}\nu > 0$ имеет бесконечное количество корней, из которых примерно $2a/\lambda$ действительны ($0 \leqslant \nu \leqslant ka$) и соответствуют незатухающим волноводным волнам. Остальные корни мнимы и соответствуют затухающим волнам.

Два независимых решения (4)

$$\Phi_1 = e^{i\nu\varphi},$$

$$\Phi_2 = e^{-i\nu\varphi} \tag{9}$$

соответствуют двум системам волн, бегущим по углу φ в противоположных направлениях.

* Векторы поля пропорциональны U или его производным. Поэтому далее рассматривается лишь сама функция U.

Условие $\mathrm{Im}\,\nu > 0$ вытекает из принципа излучения. Следовательно, все собственные значения (7) или (8) содержатся в первом квадранте комплексной плоскости ν (рис. 1).

Поле каждой собственной волны «прижато» к вогнутой стенке цилиндра (эффект Краснушкина [4]). При $kr > \nu$ зависимость от r — осциллирующая; при $kr < \nu$ поле монотонно убывает с удалением от стенки, т. е. с уменьшением r (рис. 2).

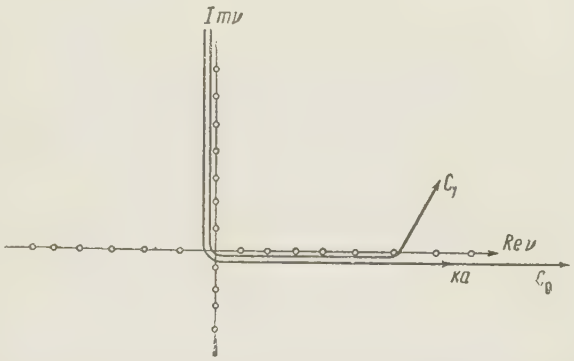


Рис. 1. Расположение корней уравнения $J_\nu(ka) = 0$ или $J'_\nu(ka) = 0$ на комплексной плоскости ν. Собственные значения задачи соответствуют корням, расположенным в первом квадранте. Наибольший действительный корень $\simeq ka$

Структура собственных волн вогнутой поверхности близка к структуре собственных волн для плоскослоистой среды в случае приземного волновода [8].

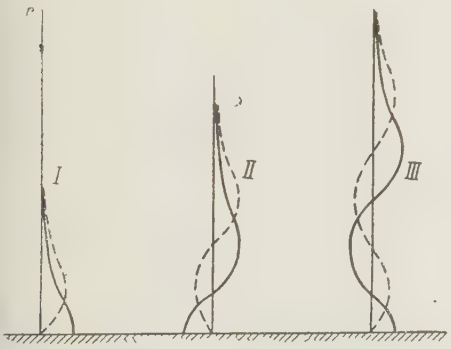


Рис. 2. Профили трех первых нормальных волн. Нижняя черта соответствует стенке цилиндра $r = a$. Первая собственная волна соответствует наибольшему действительному ν. Сплошная линия — граничное условие $dU/dr = 0$, пунктир — граничное условие $U = 0$

В области $kr > \nu$ величина ν/r является φ-й составляющей, а величина $\sqrt{k^2 - \left(\frac{\nu}{r}\right)^2}$ — r-й составляющей волнового вектора k. Это вытекает из асимптотического разложения для бесселевых функций

$$J_\nu(kr) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\cos \xi}{\sqrt[4]{(kr)^2 - \nu^2}}, \quad |kr - \nu| > (kr)^{1/3}, \tag{10}$$

где

$$\xi = \sqrt{(kr)^2 - \nu^2} - \nu \arccos \frac{\nu}{kr} - \frac{\pi}{4}, \tag{11}$$

откуда

$$k_r = \frac{d\xi}{dr} = \sqrt{(k)^2 - \left(\frac{\nu}{r}\right)^2};$$

$$k_\varphi = \frac{\nu}{r}.$$

2. ФУНКЦИЯ ГРИНА

Определим функцию Грина $\Gamma = \Gamma(r, \varphi, r', \varphi')$ задачи, т. е. функцию, обладающую следующими свойствами.

1. Она удовлетворяет уравнению (1), за исключением точки (r', φ'), где находится источник.

2. В точке (r', φ') она имеет особенность, соответствующую двумерной δ-функции $-4\pi\delta(x - x', y - y')$, или, иначе говоря, вблизи источника

$$\Gamma = i\pi H_0^{(1)}(k\rho) + \Gamma', \tag{12}$$

где ρ — расстояние между источником и точкой наблюдения; Γ' — конечная функция. При $k\rho \ll 1$ $i\pi H_0^{(1)}(k\rho) \simeq -2 \ln k\rho$.

3. При $|\varphi - \varphi'| \to \infty$ она удовлетворяет условию излучения, т. е. является волной, бегущей от источника.

4. На поверхности цилиндра $r = a$ она удовлетворяет граничному условию (3) или (2).

Используем далее вместо условия (12) эквивалентное условие

$$\frac{\partial \Gamma}{\partial \varphi}\bigg|_{\varphi=\varphi'+0} - \frac{\partial \Gamma}{\partial \varphi}\bigg|_{\varphi=\varphi'-0} = -4\pi r' \delta(r - r'). \tag{13}$$

Будем искать функцию Γ в виде

$$\Gamma = \sum_s A_s J_{\nu_s}(kr)\, e^{i\nu_s\varphi} e^{-i\nu_s\varphi'}, \quad \varphi > \varphi',$$

$$\Gamma = \sum_s A_s J_{\nu_s}(kr)\, e^{-i\nu_s\varphi} e^{i\nu_s\varphi'}, \quad \varphi < \varphi', \tag{14}$$

где A_s — искомые коэффициенты; ν_s — корни (7) или (8).

Ряды (14) удовлетворяют свойствам 1, 2, 4. Коэффициенты A_s определим из условия (13). Подставляя (14) в (13):

$$\sum_s \frac{A_s}{r} J_{\nu_s}(kr)\, 2i\nu_s = -4\pi\delta(r - r')\frac{r'}{r},$$

умножая обе части на J_{ν_s}, интегрируя в пределах $0 - ka$, используя известное соотношение

$$\int \frac{J_n J_m}{x}\, dx = \frac{x[J_m J_n' - J_n J_m']}{n^2 - m^2}$$

и граничное условие (7) или (8), получим

$$A_s = i2\pi \frac{J_{\nu_s}(kr')}{\nu_s N_s}, \tag{15}$$

где

$$N_s = -\frac{ka}{2\nu_s}\frac{d}{d\nu} J_\nu \frac{d}{d(kr)} J_\nu \bigg|_{\substack{\nu=\nu_s \\ r=a}}, \tag{16}$$

при граничном условии (7) и

$$N_s = \frac{ka}{2\nu_s} J_\nu(ka) \frac{d^2}{d\nu\, d(kr)} J_0 \bigg|_{\substack{r=\nu_s \\ r=a}} \tag{17}$$

при граничном условии (8).

ряды

$$\Gamma = -\frac{4\pi i}{ka}\sum_s \frac{J_{\nu_s}(kr)\,J_{\nu_s}(kr')}{\dfrac{dJ_{\nu_s}(ka)}{d\nu}\,\dfrac{dJ_{\nu_s}(ka)}{d(kr)}}\,e^{i\nu_s|\varphi-\varphi'|}, \tag{18а}$$

$$\Gamma = \frac{4\pi i}{ka}\sum_s \frac{J_{\nu_s}(kr)\,J_{\nu_s}(kr')}{J_{\nu_s}(ka)\,\dfrac{d^2}{d\nu d(kr)}\,J_{\nu_s}(ka)}\,e^{i\nu_s|\varphi-\varphi'|} \tag{18б}$$

удовлетворяют всем поставленным условиям и являются решением задачи для граничных условий (2) и (3).

Поместим в случае граничного условия (8) источник на стенку ($r' = a$, $\rho' = 0$) и будем рассматривать (18б) как сумму вычетов. Функция Грина может быть переписана в виде интеграла по контуру C_0 (рис. 1), охватывающего все корни (7) или (8), расположенные в первом квадранте комплексной плоскости,

$$\Gamma = \frac{2}{ka}\int_{C_0} \frac{J_\nu(kr)}{J'_\nu(ka)}\,e^{i\nu|\varphi|}\,d\nu. \tag{19}$$

3. АСИМПТОТИЧЕСКИЕ ВЫРАЖЕНИЯ ДЛЯ Г

Непосредственное вычисление поля по формулам (18) возможно лишь при относительно небольших ka. Расчет поля вдали от источника ($k\rho \gg 1$) требует учета по крайней мере всех распространяющихся волн. Как показано ниже, при $ka \gg 1$ часть нормальных волн, для которых $kr > \nu$, может быть заменена лучами.

Количество лучей при $|\varphi - \varphi'| < \pi$ много меньше количества нормальных волн. Введение лучей объясняет физическую картину поля и сильно облегчает количественный расчет.

Однако нормальные волны, у которых $\nu_s \simeq ka$, не могут быть представлены в виде какого-либо рода лучей и интерпретируются как волны шепчущей галереи.

Будем далее рассматривать область точек наблюдения вдали от места возбуждения ($k\rho \gg 1$), но расположенных на первом листе ($|\varphi - \varphi'| < \pi$).

Для перехода к лучевому представлению трансформируем контур C_0 в контур C_1 (рис. 1), охватывающий лишь часть действительных корней

$$0 < \nu < ka - (ka)^{1/3} \tag{20}$$

и уходящий далее вверх в бесконечность.

Интеграл по оставшейся за C_1 областью представим в виде суммы вычетов. Этот прием, при котором результирующее поле представляется в виде суммы лучей и нормальных волн, не является однозначным. Однако при любом количестве выделенных нормальных волн он остается справедливым.

С учетом сказанного

$$\Gamma = \frac{2}{ka}\int_{C_1} \frac{J_\nu(kr)}{J'_\nu(ka)}\,e^{i\nu|\varphi|}\,d\nu + \frac{4\pi i}{ka}\sum_s \frac{J_{\nu_s}(kr)}{\dfrac{d^2}{d\nu d(kr)}\,J_{\nu_s}(ka)}\,e^{i\nu_s|\varphi|}, \tag{21}$$

причем сумма (21) берется по всем корням (8), не удовлетворяющим (20).

При вычислениях интеграла (21) применим метод стационарной фазы. Вычисления для точек стационарной фазы $\tilde{\nu}$, удовлетворяющих условию

$$0 < \tilde{\nu} < kr - (kr)^{1/3}, \tag{22}$$

дают лучи геометрической оптики. Точки стационарной фазы в области

$$kr - (kr)^{1/3} < \tilde{\nu} < ka - (ka)^{1/3} \tag{23}$$

соответствуют полю вблизи и за пределами каустик лучей.

А. Лучи геометрической оптики. Будем вначале считать, что условие (22) справедливо на всем контуре C_1 и, следовательно, для J_ν можно использовать асимптотическое разложение Дебая (10). Однако при вычислениях мы будем использовать не все корни уравнения стационарной фазы, а лишь те из них, которые лежат внутри интервала (22).

Подставляя (10) в интеграл в (21) и учитывая, что

$$J'_\nu(x) = -\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{\sqrt[4]{x^2-\nu^2}}{x}\sin\xi,$$

получим

$$\frac{\cos\xi_r}{\cos\xi_a} = -i\left(e^{i\xi_r} + e^{-i\xi_r}\right)\sum_0^\infty e^{i(2n+1)\xi_a},$$

$$\frac{2}{ka}\int_{C_1}\frac{J_\nu(kr)}{J'_\nu(ka)}e^{i\nu|\varphi|}\,d\nu = 2i\sum_0^\infty\int_{C_1}\frac{e^{i\psi_n^+}+e^{i\psi_n^-}}{\sqrt[4]{(ka)^2-\nu^2}\sqrt[4]{(kr)^2-\nu^2}}\,d\nu, \tag{24}$$

где

$$\psi_n^\pm = \pm\xi_r + (2n+1)\,\xi_a + \nu\varphi;$$

$$\xi_r = \sqrt{(kr)^2-\nu^2} - \nu\arccos\frac{\nu}{kr} - \frac{\pi}{4}; \tag{25}$$

$$\xi_a = \sqrt{(ka)^2-\nu^2} - \nu\arccos\frac{\nu}{ka} - \frac{\pi}{4}.$$

Каждый из интегралов в правой части (24) вычислим методом стационарной фазы.

Точки стационарной фазы $\tilde{\nu}$ определяются как корни уравнения

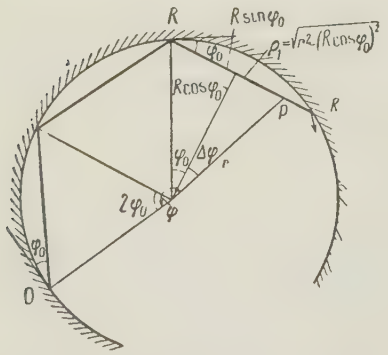


Рис. 3. Построение n-кратно отраженного луча: O — точка излучения, P — точка наблюдения, $R = a$

$$\frac{d\psi_n^\mp}{d\nu} = \pm\arccos\frac{\tilde{\nu}}{kr} + \\ + \varphi - (2n+1)\arccos\frac{\tilde{\nu}}{ka} = 0 \tag{26}$$

или, обозначая

$$\varphi_0 = \arccos\frac{\tilde{\nu}}{ka}, \qquad \Delta\varphi = \arccos\frac{\tilde{\nu}}{kr},$$
$$\varphi = (2n+1)\,\varphi_0 \mp \Delta\varphi. \tag{26a}$$

Геометрический смысл φ_0 и $\Delta\varphi$ показан на рис. 3. Непосредственное решение (26) относительно ν приводит к уравнению $4n+2$ степени и возможно лишь при $r = a$.

Обойдем эту трудность, рассматривая вначале $\tilde{\nu}$ как заданное и определяя все точки наблюдения $r = r(\varphi)$, соответствующие данной точке стационарной фазы.

Из (26) следует, что

$$r = \frac{a\cos\varphi_0}{\cos[\varphi - (2n+1)\,\varphi_0]}, \tag{27}$$

т. е. геометрическим местом $r(\varphi)$ является прямая, определяемая отрезком $a\cos\varphi_0$, повернутым на угол $(2n+1)\,\varphi_0$.

Легко видеть (см. рис. 3), что эта прямая является лучом, вышедшим под углом φ_0 к стенке и отразившимся n раз. Случай $n = 0$ соответствует первичной волне источника.

Рассмотрим теперь огибающую, каустику семейства лучей, испытавших n отражений.

Из параметрических уравнений каустики

$$\frac{\partial r}{\partial \varphi_0} = 0 \text{ или } \varphi = (2n+1)\varphi_0 - \operatorname{arc\,tg}\frac{\operatorname{tg}\varphi_0}{2n+1} \qquad (28)$$

(26) следует, что точка касания каустики лучом (рис. 4) расположена на расстоянии $a \sin \varphi_0 \left(1 - \frac{1}{2n+1}\right)$ от места отражения. Для $n=0$ каустикой является сам источник.

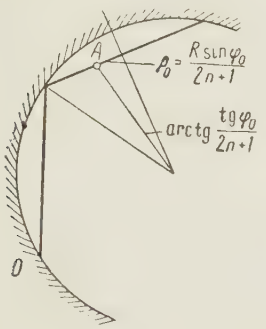


Рис. 4

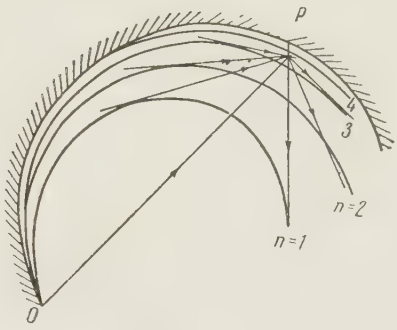


Рис. 5

Рис. 4. Построение точки касания луча и каустики: A — точка касания; $R = a$

Рис. 5. Каустики n-кратно отраженных лучей. Лучи, проходящие через точку наблюдения P, должны касаться каустик. Общее количество лучей определяется числом каустик N, расположенных между точкой P и центром окружности

Для $\varphi_0 < 1$ и $n > 1$ можно приближенно написать уравнение каустики в явном виде *:

$$r \simeq a \cos\frac{\varphi}{2n+1}\,. \qquad (29)$$

На рис. 5 показано семейство каустик для $n = 1, 2, 3, 4$.

Теперь можно непосредственно определить все стационарные точки для каждого n для заданной точки наблюдения (r, φ). Они определяются через углы φ_0 для всех $2N + 1$ лучей, которые касаются каустик и проходят через точку (r, φ). Для $n > 0$ всегда существуют два n-кратно отраженных луча: один до касания каустики (член ψ^-), другой после касания каустики (член ψ^+).

Общее количество лучей и, следовательно, точек стационарной фазы в сумме (24) ограничено и равно $2N + 1$, т. е. определяется числом N каустик, лежащих между точкой наблюдения и центром цилиндра.

Чем ближе точка наблюдения к стенке, тем больше N. При $r = a$ решение (26) получается в явном виде

$$\tilde{\nu} = ka \cos\frac{\varphi}{2m}\,,$$

* Интересно отметить, что каустики в приближении (29) отличаются друг от друга лишь «масштабом» по углу φ.

где

$$m = n \text{ для } \psi^+,$$
$$m = n + 1 \text{ для } \psi^-. \tag{30}$$

Из (30) следует, что в случае $r = a$ $N = \infty$, а точки стационарной фазы сгущаются вблизи ka, что для $n \gg 1$ нарушает исходную аппроксимацию J_ν.

Рассмотрим теперь амплитуды и фазы отдельных лучей. Образуя

$$(\psi^\mp)'' = \mp \frac{1}{\sqrt{(kr)^2 - \nu^2}} + (2n+1)\frac{1}{\sqrt{(ka)^2 + \nu^2}}, \tag{31}$$

подставляя вместо $\tilde{\nu}$ выражение $ka \cos \varphi_0$ и интегрируя (24), получим

$$\frac{2}{ka}\int \frac{J_\nu(kr)}{J'_\nu(ka)} e^{i\nu|\varphi|} d\nu = 2i\sqrt{\lambda} \sum_0^{2N+1}{}' \frac{1}{\sqrt{(2n+1)|\rho_0 \mp \rho_1|}} \times$$
$$\times \exp\left\{i\left[k\left[(2n+1)\, a \sin \varphi_{0n} \mp \rho_1\right] - \left(n + \frac{1}{2} \mp \frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4}\operatorname{sgn}(\rho_1 \mp \rho_0)\right]\right\}, \tag{32}$$

где

$$\rho_0 = \sqrt{r^2 - (a\cos\varphi_0)^2};$$
$$\rho_1 = \frac{a \sin \varphi_0}{2n+1}. \tag{33}$$

Геометрический смысл ρ_0 и ρ_1 пояснен на рис. 3 и 4. Из (32) следует, что лучи удовлетворяют закономерностям геометрической оптики, т. е. а) поток мощности переносится лучевой трубкой, б) фаза пропорциональна длине пути, в) при прохождении каустики фаза испытывает скачок на $-\pi/2$. При n отражениях лучевая трубка расширяется в $2n + 1$ раз.

Б. Поле вблизи и за границей каустики (точка наблюдения не лежит на стенке ($r < a$)). Как следует из изложенного выше, часть точек стационарной фазы попадает в область, где асимптотическое разложение Дебая для $J_\nu(kr)$ недействительно, хотя оно еще справедливо для $J'_\nu(ka)$. С точки зрения геометрических представлений это означает, что или точка наблюдения расположена вблизи каустики каких-либо лучей, или часть лучей «пролетает» между точкой наблюдения и стенкой. Если в первом случае законы геометрической оптики дают излишне большие значения амплитуды, то во втором случае — «нулевые» амплитуды. В действительности дифракция «смазывает» оба явления. Рассмотрим их более подробно. Если точка наблюдения перемещается по лучу (т. е. $\tilde{\nu} = \text{const}$ для одного из членов суммы), то в середине луча $\tilde{\nu} = kr$ и асимптотика Дебая неприменима. Кроме того, в точке $\rho_0 = \rho_1$ касания лучом каустики, как следует из (31), $\psi''(\tilde{\nu}) = 0$ и несправедливо проведенное выше интегрирование.

Хотя формально асимптотика Дебая неприменима вблизи середины луча, она дает правильный ответ в рассматриваемом приближении, так как согласно (32) амплитуда плавно меняется вдоль луча. Это связано с тем, что произведение $\sqrt{(kr)^2 - \nu^2}\sqrt{\psi''}$ остается непрерывным в середине луча.

Вблизи точки касания лучом каустики в разложении ψ необходимо сохранять кубический член, что приводит при интегрировании (24)

к функции Эйри. Это приближение переходит в приближение геометрической оптики вдали от каустики и дает конечное значение амплитуды в области каустики. Максимальные значения амплитуды находятся не на линии каустики, а смещены несколько ближе к границе цилиндра, т. е. по обе стороны от точки касания лучом каустики, если двигаться по лучу. При смещении точки наблюдения за границу каустики, ближе к центру цилиндра, для числителя подынтегрального выражения (21) необходимо применять асимптотику Фока [7]

$$J_\nu(kr) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\left(\frac{2}{kr}\right)^{1/3} v(t), \qquad (34)$$

где $v(t)$ — функция Эйри;

$$t = \left(\frac{2}{kr}\right)^{1/3}(\nu - kr);$$

$$v(t) \sim |t|^{-1/4}\sin\left[\frac{2}{3}(-t)^{3/2} + \frac{\pi}{4}\right], \quad t < -1;$$

$$v(t) \sim \frac{1}{2}t^{-1/4}\exp\left[-\frac{2}{3}t^{3/2}\right], \quad t > 1. \qquad (35)$$

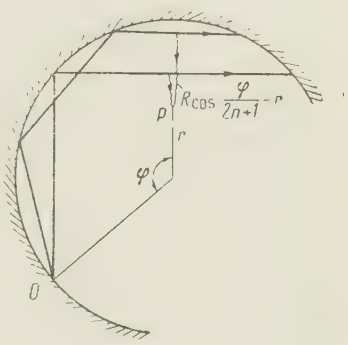


Рис. 6. Вклад в поле в точке наблюдения P от лучей, пролетающих ближе P к стенке цилиндра; $R = a$

Для расчета влияния лучей, расположенных между точкой наблюдения и стенкой, необходимо использовать аппроксимацию (34) для $J_\nu(kr)$. Положение точек стационарной фазы

$$\varphi_{0m} = \frac{\varphi}{2m+1}$$

показывает (см. рис. 6), что основной вклад в поле дается ближайшим m-кратно отраженным лучом, пролетающим между точкой наблюдения и стенкой цилиндра. Амплитуда этого поля экспоненциально зависит от расстояния между лучом и точкой наблюдения.

Распространение волны по этому участку (от луча до точки наблюдения) происходит с бесконечной фазовой скоростью (как и в случае приземного волновода, для точки наблюдения, расположенной над волноводным каналом [8]).

4. ВОЛНА ШЕПЧУЩЕЙ ГАЛЕРЕИ

Как показано выше, интеграл по контуру C_1 дает поле лучей геометрической оптики и поле в окрестности каустики. При вычислениях всюду принималось $\nu < ka - (ka)^{1/3}$, т. е. часть корней (8) была обойдена контуром C_1 и интеграл был заменен суммой вычетов.

Ниже мы преобразуем эту сумму в (21) и проанализируем вклад этих волн.

При $\nu \sim ka$ и $\nu \sim kr$ можно для $J_\nu(kr)$ и $\frac{d^2}{d\nu d(kr)}J_\nu(ka)$ применить асимптотику Фока [7], согласно которой

$$J_\nu(kr) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\left(\frac{2}{kr}\right)^{1/3} v(t), \qquad (36)$$

$$\frac{d^2 J_\nu(kr)}{d\nu d(kr)} = -\frac{1}{\sqrt{\pi}}\frac{2}{kr}\,tv(t). \qquad (37)$$

Подставляя (36), (37) в сумму (21), получим

$$\frac{4\pi i}{ka}\sum_s \frac{J_{\nu_s}(kr)}{\frac{d^2}{d\nu d(kr)}J_\nu(ka)}e^{i\nu_s\varphi} = -2\pi i\left(\frac{2}{ka}\right)^{1/3} m\sum_s \frac{v[m(t_s+y)]}{v(t_s)\,t_s}e^{ip_s\varphi}, \qquad (38)$$

где

$$m = \left(\frac{a}{r}\right)^{1/3}; \quad y = k(a-r)\left(\frac{2}{ka}\right)^{1/3}; \qquad p_s = ka - \left(\frac{ka}{2}\right)^{1/3} t_s;$$

t_s — s-й корень уравнения $v'(t) = 0$;

$$t_0 = -1{,}01; \quad t_2 = -4{,}82;$$

$$t_1 = -3{,}25; \quad t_s \simeq -\left\{\frac{3}{2}\left[(2s+1)\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right]\right\}^{2/3}. \tag{39}$$

Из (38) и (39) следует, что $t_s < 0$, а величина $t_s + y$ может быть как меньше, так и больше нуля.

При $t_s + y < 0$ собственная волна имеет осциллирующий характер, а при $t_s + y > 0$, т. е. вдали от стенки,— затухающий. Аналогично полю лучей, проскакивающих между точкой наблюдения и стенкой, первые нормальные волны дают слабые вклады в поле вдали от стенки. При $t_s + y < 0$ поле образуется как за счет обычных, так и за счет нормальных волн. Так как функции $v(t)$ хорошо табулированы [8], вычисления по формуле (38) не представляют большого труда.

При $r = a$ сумма (38) значительно упрощается и равна

$$2\pi i\left(\frac{2}{ka}\right)^{1/3}\sum_s \frac{e^{ip_s\varphi}}{t_s}. \tag{40}$$

Из последнего выражения следует, что при $ka \gg 1$ по поверхности цилиндра бежит волна, амплитуда которой весьма мало уменьшается с ростом φ. В этой совокупности нормальных волн основной волной является низшая собственная волна цилиндра.

Таким образом, расчет подтверждает точку зрения Релея [3] о том, что аномально слабое затухание звука непосредственно у вогнутой стенки связано не с фокусировкой отраженных лучей, а с наличием специфической волны, прилегающей к вогнутой стенке. Эта волна аналогична волне в приземном волноводе [8].

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Результаты ранее проделанных расчетов дифракции на выпуклых телах показывают, что в пределе при $\lambda \to 0$ поле можно представить в виде суммы «лучей», удовлетворяющих принципу Ферма. Часть этих лучей является обычными лучами геометрической оптики, часть — дифракционными лучами [2], бегущими по поверхности тела и экспоненциально затухающими в области тени.

Результаты настоящего расчета показывают, что асимптотическое представление поля в виде суммы лучей справедливо также и для дифракции на вогнутой поверхности. В этом случае характерна множественность лучей геометрической оптики. Эквивалентом затухающих дифракционных лучей Келлера являются незатухающие лучи шепчущей галереи, бегущие по поверхности тела. Эти лучи следует рассматривать скорее как волны волноводного типа, ведомые вогнутой поверхностью тела.

Замедление спадания поля заметно даже при движении точки наблюдения от источника на постоянном расстоянии от стенки, превышающем толщину слоя волны шепчущей галереи. По мере увеличения φ вследствие пересечения линий каустик возрастает количество приходящих лучей и поле затухает в среднем медленнее, чем $\sqrt{a\varphi}$.

В заключение считаю своим приятным долгом выразить благодарность Л. А. Вайнштейну и А. А. Федорову за внимание и ценные советы при написании этой работы.

ЛИТЕРАТУРА

. Д. Менцер, Дифракция и рассеяние радиоволн, перев. с англ., Изд. Советское радио, 1958.
2. Л. А. Вайнштейн, А. А. Федоров, Рассеяние плоских и цилиндрических волн на эллиптическом цилиндре и концепция дифракционных лучей, Радиотехника и электроника, 1961, 6, 1, 31.
3. Релей, Теория звука, II, § 287, ГТИ, 1940.
4. П. Е. Краснушкин, Метод нормальных волн в применении к проблеме дальних радиосвязей, Изд. МГУ, 1947.
5. Г. А. Гринберг, Н. Н. Лебедев, Н. П. Скальская, Я. С. Уфлянд, Волновая задача для параболического цилиндра, Докл. АН СССР, 1954, 95, 5, 951.
6. В. А. Фок, Теория дифракции от параболоида вращения, Сб. Дифракция электромагнитных волн на некоторых телах вращения, Изд. Советское радио, 1957.
7. В. А. Фок, Дифракция радиоволн вокруг земной поверхности, Изд. АН СССР, 1946.
8. Л. М. Бреховских, Волны в слоистых средах, Изд. АН СССР, 1957.

Поступила в редакцию
18 X 1960

1961 № 8

ПОДАВЛЕНИЕ РЕЗОНАНСНЫХ ЯВЛЕНИЙ В МНОГОВОЛНОВЫХ ВОЛНОВОДАХ*

Р. Б. Ваганов, В. В. Мериакри

Сформулированы требования к фильтрам волн нежелательных типов, исходя из необходимости подавления резонансных явлений. Описан метод измерения параметров, характеризующих резонансные участки тракта; предложен способ устранения резонансных эффектов, использующий ответвители с сильной связью; изложены результаты экспериментального исследования конкретного образца фильтра.

ВВЕДЕНИЕ

В последнее время в антенной технике все чаще используются волноводы увеличенного сечения, в которых наряду с рабочей волной могут распространяться и волны нежелательных (паразитных) типов. Наибольший интерес представляют волноводы круглого сечения с волной H_{01}, в которых могут быть реализованы затухания порядка единиц децибел на километр [1]. Волны нежелательных типов, возникающие на неоднородностях тракта, имеют обычно очень малую амплитуду; однако, находясь в резонансных условиях, они могут вносить в основную передаваемую волну большие дополнительные потери** [2], а также увеличивать коэффициент стоячей волны (КСВ) от резонирующих участков и вызывать в них перенапряжения.

Классическим примером неоднородности, порождающей паразитные волны, является плавный переход между двумя регулярными волноводами. При прохождении основной волны по этому переходу, начиная с некоторого (критического) сечения, образуется паразитная волна, которая затем распространяется в волноводе независимо от основной. Участок двухволнового волновода между такими переходами при определенных условиях становится резонансным для паразитной волны.

В работе [2] приведен расчет коэффициента прохождения через такой участок длины L (рис. 1) на основе представления перехода в виде шестиполюсника с матрицей рассеяния S. Переход предполагается не имеющим потерь и согласованным со стороны входа. При этих условиях все элементы Γ_{mn} матрицы рассеяния выражаются через коэффициент преобразования основной волны в паразитную Γ_{02}. Выпишем полученное в [2] выражение для коэффициента прохождения

$$|D| = \frac{1}{1-\Gamma^2(1-e^{-j\varphi})}\left\{1-\frac{2\Gamma^2(1-\Gamma^2)(1-\cos\varphi)}{1-e^{-j2\psi_2}[1-\Gamma^2(1-e^{-j\varphi})]^2}\right\}. \qquad (1)$$

Здесь $\Gamma=|\Gamma_{02}|$; $\varphi=\psi_1-\psi_2$; $\psi_1=(\beta_1-j\alpha_1)L-\varphi_{11}$; $\psi_2=(\beta_2-j\alpha_2)L-\varphi_{22}$; β — коэффициент распространения; α — коэффициент затухания в двухволновом волноводе; $\varphi_{11}=\arg\Gamma_{11}$; $\varphi_{22}=\arg\Gamma_{22}$.

---

* Из доклада Р. Б. Ваганова, Ю. М. Исаенко, В. В. Мериакри «Резонансные явления в многоволновых волноводах и способы борьбы с ними», сделанного на сессии Научно-технического общества радиотехники и электросвязи им. А. С. Попова 19 V 1960 г.

** В дальнейшем изложении под основной волной понимается волна рабочего типа.

Подобным образом можно получить выражения для остальных величин в резонаторе. Приведем представляющее интерес выражение для коэффициента отражения от резонатора

$$|R| = \Gamma^2 (1 - \Gamma^2) \left| \frac{(1 - e^{-j\varphi}) e^{-j\psi_2}}{1 - e^{-j2\psi_2} [1 - \Gamma^2 (1 - e^{-j\varphi})]^2} \right|. \qquad (2)$$

Резонанс проявляется в том, что при выполнении условия

$$\beta_2 L - \varphi_{22} = \pi p, \quad p = 1, 2, 3, \ldots \qquad (3)$$

в сигнале, прошедшем через участок тракта, появляется линия поглощения. Потери, вносимые в тракт основной волны, становятся максимальными, а отражение от резонирующего участка тракта сильно возрастает,

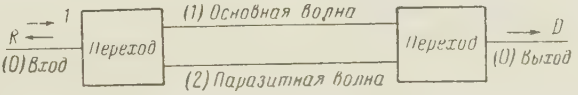


Рис. 1. Схема резонансного участка

если электрическая длина резонатора такова, что кроме условия (3) выполняется (или почти выполняется) соотношение

$$(\beta_2 L - \varphi_{22}) - (\beta_1 L - \varphi_{11}) = (2q - 1)\pi, \quad q = 1, 2, 3, \ldots . \qquad (4)$$

Рассмотрим практически важный случай малых затуханий. Если считать резонирующий участок достаточно коротким и не содержащим элементов, которые вносят потери в основную или в паразитную волну, то $\alpha_1 L \ll 1$, $\alpha_2 L \ll 1$. При этих условиях выражения (1) и (2) упрощаются:

$$|D| = \frac{1 - \Gamma^2\left(1 + \frac{\alpha_1}{\alpha_2}\right)}{1 + \frac{2\Gamma^2 (1 - \Gamma^2)}{\alpha_2 L}} \simeq \frac{1}{1 + \frac{2\Gamma^2}{\alpha_2 L}} \quad \text{при } \Gamma^2 \ll 1, \qquad (5)$$

$$|R| = \frac{1}{1 + \frac{\alpha_2 L}{2\Gamma^2 (1 - \Gamma^2)}} \simeq \frac{1}{1 + \frac{\alpha_1 L}{2\Gamma^2}} \quad \text{при } \Gamma^2 \ll 1. \qquad (6)$$

В отсутствие потерь паразитной волны ($\alpha_2 L = 0$) основная волна вообще не проходит через резонирующий участок и полностью отражается. Для снижения прямых потерь и уменьшения КСВ $= (1 + |R|)/(1 - |R|)$ нужно, чтобы $\alpha_2 L \geqslant 2\Gamma^2 (1 - \Gamma^2)$. Возможно и еще одно нежелательное явление: из-за увеличения напряженности поля паразитной волны в резонаторе может наступить пробой. Наибольшее значение этой напряженности при условии максимального резонанса (3), (4) и при малых потерях равно $\frac{1}{\Gamma + \frac{\alpha_2 L}{2\Gamma}}$; для снятия перенапряжения необходимо выполнить соотношение $\alpha_2 L \geqslant 2\Gamma (1 - \Gamma)$.

Очевидно, для устранения рассмотренных явлений можно идти либо по пути создания переходов с возможно меньшим коэффициентом преобразования, либо — при заданных переходах — по пути внесения дополнительного затухания в паразитную волну.

Что касается «звучания» резонатора, которое может проявиться, например, при индикации неоднородностей тракта короткими импульсами, единственным эффективным средством борьбы с ним, как показал Ю. М. Исаенко [3], является увеличение $\alpha_2 L$.

1. МЕТОД ИЗМЕРЕНИЯ ПАРАМЕТРОВ, ХАРАКТЕРИЗУЮЩИХ РЕЗОНАНСНЫЕ УЧАСТКИ ТРАКТА

Чтобы выяснить, насколько данный тракт подвержен опасности возникновения резонансов на паразитной волне, нужно знать коэффициенты преобразования Γ^2 входящих в тракт переходов и затухание паразитной волны $\alpha_2 L$. Расчет указанных величин в реальной системе, включающей конусы и другие неоднородности, является весьма громоздким, поэтому полезно иметь простой метод измерения малых Γ^2 и $\alpha_2 L$. Кроме того, нужно уметь измерять большие $\alpha_2 L$, вносимые в волноводный тракт фильтрами паразитных волн.

Первая задача наиболее просто решается измерениями «на проход». В этом случае определяется коэффициент прохождения $|D|$ через участок многоволнового тракта между двумя переходами при максимальном резонансе и такое изменение длины резонатора δL, при котором коэффициент прохождения по мощности равен

$$|D_{1/2}|^2 = \frac{1 + |D|^2}{2}. \tag{7}$$

Покажем, что для определения Γ^2 и малых затуханий $\alpha_2 L$ достаточно знать $|D|$ и δL. Действительно, из (1) (принимая во внимание малость $\alpha_2 L$) и условия (7) можно получить соотношение

$$\delta(\beta_2 L - \varphi_{22}) = 2\Gamma^2 + \alpha_2 L. \tag{8}$$

Заметим, что β_2 и φ_{22} зависят лишь от частоты, тогда как при измерениях изменяется только длина резонатора L, поэтому $\delta(\beta_2 L - \varphi_{22}) = \beta_2 \delta L$. Из (5) и (8) легко получаются выражения для коэффициента преобразования

$$\Gamma^2 = \frac{1}{2}\beta_2 \delta L(1 - |D|) \tag{9}$$

и для затухания паразитной волны

$$\alpha_2 L = \beta_2 \delta L |D|. \tag{10}$$

Зная Γ^2 и $\alpha_2 L$, можно рассчитать как коэффициент отражения от резонатора, так и максимальную напряженность паразитной волны при резонансе.

Следует оговориться, что описанный метод можно применять лишь при наличии двух одинаковых переходов. Рассмотрим теперь, какими преимуществами он обладает по сравнению с описанным ранее методом «на отражение» [4, 5], где измеряется отражение от волноводной системы, состоящей из перехода и многоволнового волновода с отражающим поршнем.

а) Резонансные коэффициенты прохождения и отражения в схемах на проход и на отражение по-разному зависят от электрической длины резонатора, причем здесь существенны фазовые соотношения между основной и паразитной волнами. В схеме на проход при выполнении условия

$$(\beta_2 L - \varphi_{22}) - (\beta_1 L - \varphi_{11}) = 2q\pi, \quad q = 1, 2, 3, \ldots$$

резонанс исчезает («отсутствующий» резонанс). Огибающая резонансов между двумя отсутствующими резонансами показана на рис. 2, *а*. Форма огибающей не зависит от отношения $\alpha_2 L/\Gamma^2$, величина которого изменяет только максимальную глубину резонанса. «Центральный» резонанс, находящийся между отсутствующими резонансами и представляющий наибольший интерес, удовлетворяет соотношению (4) и в случае на проход всегда будет наиболее глубоким, что весьма облегчает его нахождение. В схеме на отражение картина несравненно сложнее. Огибающие

резонансов в этом случае приведены на рис. 2,*б*. Их форма существенно зависит от величины $\alpha_2 L/\Gamma^2$ [4]. Центральный резонанс может быть найден только тогда, когда известны все резонансы по крайней мере в пределах половины длины волны биения.

б) Из формул (9), (10) видно, что Γ^2 и $\alpha_2 L$ определяются однозначно через $|D|$ и δL, тогда как в схеме на отражение нужно предварительно устанавливать, что больше: Γ^2 или $\alpha_2 L$. Действительно, в последнем случае

$$\left.\begin{matrix}\Gamma^2 \\ \text{или} \\ \alpha_2 L\end{matrix}\right\} = \frac{1}{2}\beta_2 \delta L\,(1 \pm R),$$

причем знак плюс относится к большей из величин Γ^2 и $\alpha_2 L$, а знак минус — к меньшей.

в) Ширина резонансной кривой в нашем случае больше, чем в схеме на отражение из-за появления в резонаторе дополнительного элемента связи — второго перехода. В связи с этим измерение δL при малых Γ^2 и $\alpha_2 L$ упрощается.

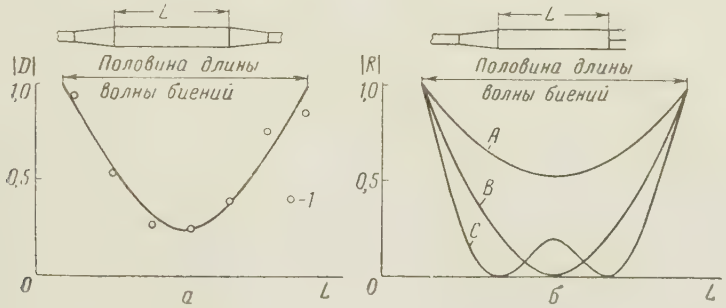


Рис. 2. Огибающие коэффициентов прохождения и коэффициентов отражения при резонансе:

а — случай на проход, *1* — экспериментальные точки; *б* — случай на отражение, *A* — $\alpha_2 L/\Gamma^2 > 1$, *B* — $\alpha_2 L/\Gamma^2 = 1$, *C* — $\alpha_2 L/\Gamma^2 < 1$

г) Наконец, существенным преимуществом схемы на проход в процессе практического осуществления является отсутствие эффекта длинной линии, возникающего при измерении отражения от резонатора вследствие отражений от возбудителя, аттенюаторов и из-за конечной величины коэффициента направленности ответвителя.

Отметим, что общим недостатком этих методов является трудность измерения Γ^2, если $\Gamma^2 \gg \alpha_2 L$. Приходится вносить дополнительное затухание, чтобы сблизить эти величины.

Для решения второй задачи, т. е. измерения значительного затухания паразитной волны, внесенного фильтром, приходится обращаться к наиболее общей формуле (1) для коэффициента прохождения. Будем считать, что резонанс максимальный; кроме того, фильтр вносит ослабление преимущественно в паразитную волну, так что $\alpha_2 L \gg \alpha_1 L$, и формула несколько упрощается:

$$|D| = \frac{1}{1-\Gamma^2(1+e^{-\alpha_2 L})}\left\{1 - \frac{2\Gamma^2(1-\Gamma^2)(1-\operatorname{ch}\alpha_2 L)}{1-e^{-2\alpha_2 L}\,[1-\Gamma^2(1+e^{-\alpha_2 L})]^2}\right\}. \qquad (11)$$

Предварительно измеряется коэффициент преобразования переходов Γ^2 по вышеописанной методике, затем в паразитную волну вводится затухание. Измеряя коэффициент прохождения $|D|$, определяем $\alpha_2 L$ по

семейству кривых $|D| = f(\alpha_2 L, \Gamma^2)$ (рис. 3), рассчитанному по формуле (11).

Таким образом, даже при значительных затуханиях паразитной волны можно определить основные параметры резонатора, что позволяет по общим формулам найти и КСВ и перенапряжение в волноводе.

2. ОТВЕТВИТЕЛЬ С СИЛЬНОЙ СВЯЗЬЮ ДЛЯ ПОДАВЛЕНИЯ РЕЗОНАНСНЫХ ЯВЛЕНИЙ НА ВОЛНАХ H_{0n}

Для введения дополнительного затухания на паразитных волнах элементы, вносящие тепловые потери или потери на излучение, обычно помещают в тех участках волновода, где напряженности поля E или H основной волны близки к нулю, а соответствующие напряженности фильтруемой паразитной волны конечны. Подавить таким образом волны, сходные по конфигурации поля с основной волной, без заметного ослабления последней не удается. В литературе дан теоретический анализ фильтров волны H_{02} двух типов, использующих круглый волновод, модифицированный так, что волна H_{02} находится в полосе непропускания, а H_{01} — в зоне прозрачности. В волновод для этого вводятся периодические симметричные неоднородности — диэлектрические шайбы [6] или металлические диафрагмы [7]. Однако сведений о практическом осуществлении каких-либо фильтров волн $H_{0n}(n \geqslant 2)$ до настоящего времени не имеется.

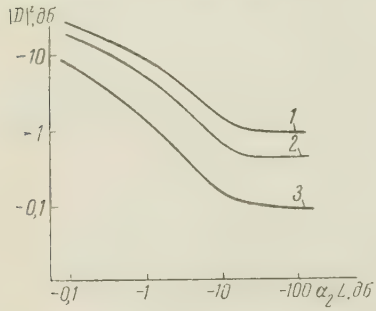


Рис. 3. Зависимость коэффициента прохождения от величины омических потерь паразитной волны:
1 — $\Gamma^2 = 1 \cdot 10^{-1}$; 2 — $\Gamma^2 = 5 \cdot 10^{-2}$; 3 — $\Gamma^2 = 1 \cdot 10^{-2}$

Для подавления волн, сходных по структуре поля с основной волной, в работе используется принцип селекции по фазовым скоростям, т. е. различие фазовых скоростей основной и паразитной волн. Основанные на этом принципе фильтры выполняются в виде ответвителей с сильной связью, типа известных дифракционных преобразователей Миллера [8]. Такой ответвитель, отбирая большую часть энергии паразитной волны из основного волновода во вспомогательный, увеличивает величину $\alpha_2 L$ резонирующей волны, а следовательно, снижает резонансные эффекты *. Отметим, что при использовании ответвителя как фильтра для подавления резонансных явлений требования к необходимой величине связи оказываются менее жесткими, чем при классическом применении ответвителя в качестве преобразователя типов волн. Кроме того, от ответвителя не требуется высокой направленности. Достижение требуемых коэффициентов связи порядка 0,5—1 *дб* является в настоящее время вполне выполнимой задачей [9, 10].

Опишем вкратце методику расчета фильтра-ответвителя. Для получения максимального отбора энергии во вспомогательный волновод необходимо удовлетворить условиям [8].

$$c_N = \frac{\pi}{2}, \quad \beta_1' = \beta_2', \tag{12}$$

где c_N — коэффициент связи по напряженности взаимодействующих волн через N отверстий; β_1' и β_2' — фазовые постоянные связанных волн.

* Этот способ подавления резонансных явлений предложен Ю. М. Исаенко и В. В. Мериакри в 1958 г

При определении c_N ограничимся рассмотрением связи лишь двух волн Π_1 и Π_2 (по одной в основном и вспомогательном волноводах), что всегда справедливо при достаточно высокой избирательности ответвителя. Пусть связанные волны имеют равные фазовые постоянные β_1' и β_2'. Тогда коэффициент возбуждения вторичной волны B_2 можно представить согласно [1] в виде

$$B_2 = -\frac{\int\limits_S [\mathbf{E}\mathbf{h}_2]\, ds}{2k\beta' g^2} \tag{13}$$

где интеграл берется по поверхности отверстий связи S; $k = 2\pi/\lambda$; $\lambda_{кр} = 2\pi/\lambda_{кр}$; $\mathbf{h}_2$ — ортонормированная вспомогательная функция магнитного поля волны Π_2; $\mathbf{E}$ — напряженность электрического поля волны Π_1 на отверстии; λ — длина волны в свободном пространстве; $\lambda_{кр}$ — критическая длина волны в волноводе.

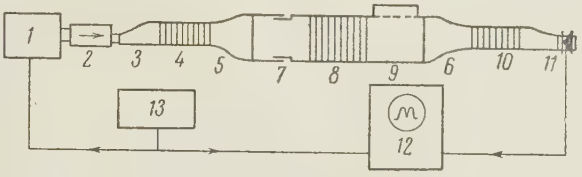


Рис. 4. Блок-схема измерительной установки

Для нахождения амплитуды B_2 необходимо знать распределение $\mathbf{E}$ на элементе связи. Такая задача решена для связи круглого и прямоугольного волноводов через круглое отверстие радиуса $\rho \ll \lambda$ [12]. Однако, например, для волн H_{0n} наиболее эффективны ответвители с продольными щелями, дающие максимальный коэффициент связи на единицу длины. Непосредственное решение такой задачи представляет большие трудности. В этом случае оценку коэффициента связи можно произвести, используя методику [12], с учетом выражения, связывающего щель длины l с эквивалентным круглым отверстием радиуса ρ:

$$\frac{4}{3}\rho^3 = Ml^3, \tag{14}$$

где M — магнитная поляризуемость щели [13].

Определив амплитуду B_2 возбужденной волны (13), нетрудно найти выражение для коэффициента связи c_N через N одинаковых щелей, вычислив предварительно мощность волны Π_2. Для случая связи волн $H_{0n}^{\bigcirc}$ и $H_{10}^{\square}$ * такой расчет приводит к выражению

$$c_N = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{\mu_{0n} NMl^3}{\beta_{0n}\sqrt{a^3 b r^2}} e^{j\beta_{ш}\tau}. \tag{15}$$

Здесь μ_{0n} — n-й корень уравнения $J_0'(x) = 0$; r — радиус круглого волновода; a и b — размеры соответственно широкой и узкой стенок прямоугольного волновода; τ — толщина стенки щели; $\beta_{ш}$ — фазовая постоянная волны Π_1 в щели. Строго говоря, выражения (14) и (15) справедливы лишь при ρ, $l \ll \lambda$. При больших значениях ρ и l точность расчета падает. Однако в [9] выражение (14) использовалось для расчета связи волн $H_{11}^{\bigcirc}$ и $H_{10}^{\square}$ через длинные щели ($l > \lambda$) и дало удовлетворительное совпадение экспериментальных и теоретических результатов. Связь через резо-

* Значки ○ и □ обозначают круглый и прямоугольный волноводы соответственно.

нансные щели $\left(l = n\frac{\lambda}{2},\ n = 1, 2, 3, \ldots\right)$, изученная в [10], важна лишь для узкополосных ответвителей отдельных частотных каналов и нами не рассматривается.

Максимальная перекачка энергии волны Π_1 в волну Π_2, как было указано в (12), имеет место при $c_N = \pi/2$, причем полное преобразование достигается в случае равенства постоянных распространения этих волн. Наличие связи изменяет величину фазовых постоянных по сравнению с фазовыми постоянными β_1 и β_2 в несвязанных волноводах тех же размеров. «Возмущенные» фазовые постоянные β_1' и β_2' имеют вид [8]

$$\beta_1' = \beta_1 + \frac{c_{11}}{d},$$

$$\beta_2' = \beta_2 + \frac{c_{22}}{d}, \tag{16}$$

где c_{11}, c_{22} — коэффициенты связи через одно отверстие двух одинаковых волн в связанных идентичных волноводах; d — расстояние между соседними отверстиями. Для ответвителя $H_{0n}^{\bigcirc} \to H_{10}^{\square}$ c_{11} соответствует связи волн $H_{0n}^{\bigcirc}$ и $H_{0n}^{\bigcirc}$, а c_{22} — связи $H_{10}^{\square}$ и $H_{10}^{\square}$.

Нетрудно получить подобно выражению (15)

$$c_{11} = \frac{1}{2\pi}\frac{\mu_{0n}^2 M l^3}{r^4 \beta_{0n}},$$

$$c_{22} = \frac{\pi M l^3}{a^3 b \beta_{10}}. \tag{17}$$

Условия (12) и полученные соотношения (15), (16), (17) позволяют выбрать размеры и количество элементов связи, а также размер вспомогательного волновода.

3. ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

При помощи методики, описанной в § 2, был рассчитан и сконструирован макет фильтра волны H_{02}^{0} в круглом волноводе диаметра 25 *мм*, предназначенный для волн длины порядка 8 *мм*. Система связи состояла из ряда щелей (до 25) размера 7 × 1,5 *мм*. Коэффициент связи через одну щель (см. выражение (15)) волны H_{02}^{0} с волной H_{10}^{0} составлял около —19 *дб*. Для выполнения условий (12) было достаточно 16 отверстий; большее число элементов связи было взято для исследования зависимости c_N от N. Фильтр был изготовлен гальваническим способом, что позволило резко улучшить качество контакта в месте соединения круглого и прямоугольного волноводов.

Измерения подавления резонансных явлений на волне $H_{02}^{\bigcirc}$ при помощи фильтра проводились по схеме, представленной на рис. 4.

От генератора СВЧ *1* мощность проходит через развязывающий аттенюатор *2* к преобразователю $H_{10}^{\square} \to H_{01}^{\bigcirc}$ *3* с кольцевым фильтром *4*. Волна $H_{01}^{\bigcirc}$ поступает слева на переход *5* с диаметра 12 *мм* на диаметр 25 *мм*. На переходе возбуждается волна $H_{02}^{\bigcirc}$, которая может резонировать между переходом *5* и аналогичным ему переходом *6*. Между обоими переходами включены раздвижное соединение *7*, позволяющее изменять длину резонатора, кольцевой фильтр *8*, предназначенный для подавления несимметричных волн, и, наконец, *9* — исследуемый фильтр волны $H_{02}^{\bigcirc}$. На выходе резонатора находится преобразователь $H_{10}^{\square} \to H_{01}^{\bigcirc}$ с фильтром *10*. Сигнал с детекторной головки *11* подается на вход осциллографа *12*. Модуляция частоты генератора *1* синусоидой от звукового генератора *13* позволяет наблюдать на экране осциллографа зону генерации клистро-

на, а в случае резонанса на паразитной волне — резонансный провал на зоне. Изменяя при помощи раздвижного соединения 7 длину резонатора, находим наибольший провал. Сравнивая величину сигнала, прошедшего через систему при резонансе, с величиной зоны в отсутствие резонанса, определяем коэффициент прохождения при резонансе.

Рис. 5. Потери на волне H_{01} при резонансе на волне H_{02}:
а — случай малых потерь на волне H_{02}; б — случай больших потерь на волне H_{02}

Переходы 5 и 6 имели $\Gamma^2 = 0{,}05$. Потери на волне $H_{02}^{\circlearrowright}$, вносимые фильтром 9, достигали в диапазоне волн 8,0—8,3 *мм* 10 *дб* (рис. 5). В произвольной частотной точке определена зависимость $\alpha_2 L$ от числа открытых щелей, часть которых закрывалась фольгой (рис. 6). Для выравнивания фазовых скоростей связанных волн в прямоугольный волновод вводилась подстроечная металлическая пластина. Во всех случаях потери на волне $H_{01}^{\circlearrowright}$, вносимые фильтром, были менее 0,2 *дб*.

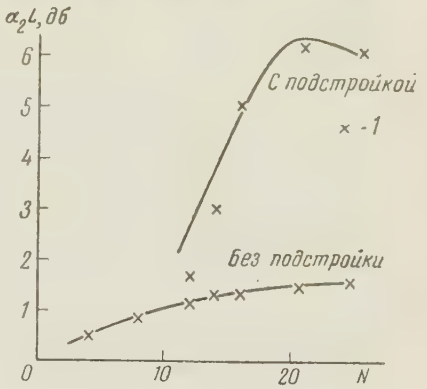


Рис. 6. Зависимость вносимых потерь на волне H_{02} от числа щелей (1 — экспериментальные точки)

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

1. Анализ нежелательных эффектов, обязанных резонансам на паразитных волнах в многоволновых волноводах, позволяет рассчитать увеличение потерь и КСВ основной волны, а также перенапряжения, возникающие в фидерах с рядом распространяющихся волн. На основании полученных соотношений в каждом конкретном случае может быть найден оптимальный путь устранения резонансных эффектов.

2. Резонансные явления могут быть экспериментально исследованы по предложенной в работе методике. Особенно важна для практики возможность измерения коэффициентов возбуждения волн и их затухания.

3. До сих пор не удавалось фильтровать волны, сходные по структуре поля с рабочей волной (в частности волну H_{02}). Предложенный способ фильтрации, основанный на использовании в качестве фильтров ответвителей с сильной связью, в какой-то мере позволил решить эту задачу. Описанная в работе простая методика приближенного расчета ответвителей с сильной связью применена к расчету фильтра волны $H_{02}^{\circlearrowright}$ в волноводе с $kr \simeq 10$. Изготовленный с применением гальванической технологии макет ответвителя подтвердил возможность создания фильтров, вносящих потери, достигающие на паразитной волне порядка 10 *дб* и на рабочей волне менее 0,2 *дб*.

4. При переходе к волноводам все большего диаметра, что диктуется требованием снизить затухание передаваемого сигнала, резко уменьшается согласно (18) коэффициент связи фильтра. Поэтому для подавления резонансных явлений в линиях с большим kr фильтры следует помещать вблизи критического сечения ослабляемой волны, т. е. в области минимальных значений kr. В случае невозможности перехода на меньший диаметр целесообразно использовать фильтры с рядом азимутальных каналов, по типу ответвителей, предложенных в работе [12]. При заданном ослаблении паразитной волны это позволит значительно сократить длину фильтра по сравнению с одноканальным. Нет необходимости симметрировать каналы по фазе, так как ответвленная мощность может поглощаться отдельно в каждом вспомогательном волноводе.

Авторы весьма признательны М. В. Персикову за ценные обсуждения и интерес, проявленный к работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ю. И. Казначеев, Радиотехника и электроника, 1958, 3, 6, 731; Вестн. АН СССР, 1960, 2, 67.
2. А. Кинг, Е. Маркатили, Волноводные линии передачи с малыми потерями, Сб. статей, перев. с англ., ИЛ, 1960, 374.
3. Р. Б. Ваганов, Ю. М. Исаенко, В. В. Мериакри, Докл. на сессии Научно-технического общества радиотехники и электросвязи им. А. С. Попова, 19 V 1960.
4. Y. Klinger, Proc. Instn Electr. Engrs, 1959, B106, Suppl. N 13, 89.
5. Р. Б. Ваганов, Радиотехника и электроника, 1960, 5, 5, 727.
6. М. Жугэ, Французский патент кл. H_{01} *b*, № 1160875, 12 VIII 1958.
7. К. М. Архипова, В. А. Судаков, Изв. АН СССР, Отд. техн. н. (Энергетика и автоматика), 1960, 1, 144.
8. С. Миллер, Волноводные линии передачи с малыми потерями, Сб. статей, перев. с англ., ИЛ, 1960, 139.
9. R. W. Dawson, Bell System Techn. J., 1957, 36, 2, 391.
10. В. В. Мериакри, Радиотехника и электроника, 1959, 4, 11, 1929.
11. М. Б. Заксон, Докл. АН СССР, 1949, 66, 4, 637.
12. М. В. Персиков, Радиотехника и электроника, 1957, 2, 1, 65.
13. S. Cohn, Proc. I. R. E., 1951, 39, 11, 1417.

Институт радиотехники
и электроники АН СССР

Поступила в редакцию
25 VIII 1960

1961 № 8

ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЕ ПОЛЕ И РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ТОКА ВДОЛЬ БЕСКОНЕЧНО ДЛИННОГО ИЗОЛИРОВАННОГО ПРОВОДА В ПРОВОДЯЩЕЙ СРЕДЕ

П. П. Павлов

Исследованы электромагнитное поле и распределение тока вдоль бесконечно длинного изолированного провода в проводящей среде при сосредоточенном возбуждении. Обоснована возможность применения телеграфных уравнений к изолированному проводу, находящемуся в морской воде и во влажной почве, в диапазоне частот от $6 \cdot 10^3$ до $3 \cdot 10^7$ *гц*.

ВВЕДЕНИЕ

При расчете основных параметров, как, например, входного сопротивления, действующей длины и характеристики направленности, антенну, выполненную в виде изолированного провода конечной длины, обычно рассматривают как отрезок длинной линии с потерями, разомкнутой или замкнутой накоротко, или же замкнутой на комплексное сопротивление конечной величины. Расчет таких линий основан на применении телеграфных уравнений, однако такой подход к задаче нуждается в дополнительном обосновании.

1. ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЕ ПОЛЕ ЦИЛИНДРИЧЕСКОГО ИЗОЛИРОВАННОГО ПРОВОДА, РАСПОЛОЖЕННОГО В ПРОВОДЯЩЕЙ СРЕДЕ

При рассмотрении электромагнитного поля, создаваемого током в бесконечно длинном проводе, необходимо учитывать три среды (рис. 1:) 1) провод, электромагнитные свойства которого характеризуются ε_1, μ_1 и σ_1, 2) цилиндрическую полость, заполненную изоляционным материалом, имеющим параметры ε_2, μ_2 и σ_2, 3) проводящую среду, обладающую параметрами ε_3, μ_3, σ_3.

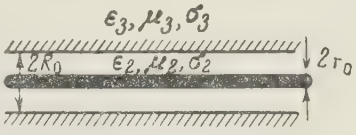


Рис. 1

При принятой зависимости тока и составляющих поля от времени через $e^{-i\omega t}$ решение волнового уравнения имеет вид

$$\Pi = \int_{-\infty}^{+\infty} A(\gamma) Z_0(r\sqrt{k^2 - \gamma^2})\, e^{i\gamma z}\, d\gamma. \quad (1)$$

Для упрощения задачи будем считать, что удельная электрическая проводимость провода бесконечно велика. При таком допущении поле внутри провода можно принять равным нулю. В результате будем иметь вместо задачи по определению поля в трех средах задачу по отысканию поля в двух средах.

Ввиду того, что в цилиндрической полости имеет место отражение волн от границы раздела диэлектрик — проводящая среда, для пространства внутри цилиндрической полости решение волнового уравнения представим в виде

$$\Pi = \int_{-\infty}^{+\infty} [A_1(\gamma) J_0(v_2 r) + A_2(\gamma) N_0(v_2 r)]\, e^{i\gamma z}\, d\gamma, \quad (2)$$

где

$$v_2 = \sqrt{k_2^2 - \gamma^2}; \quad k_2 = \frac{2\pi}{\lambda}\sqrt{\varepsilon'_{k2}};$$

ε'_{k2} — относительная диэлектрическая проницаемость изоляционного материала. Для поглощающей среды имеем

$$\Pi = \int_{-\infty}^{+\infty} A_3(\gamma)\, H_0^{(1)}(v_3 r)\, e^{i\gamma z} d\gamma, \tag{3}$$

где

$$v_3 = \sqrt{k_3^2 - \gamma^2}; \qquad k_3 = \frac{2\pi}{\lambda}\sqrt{\varepsilon'_{k3}};$$

ε'_{k3} — относительная диэлектрическая проницаемость проводящей среды. Составляющие электромагнитного поля определяются выражениями:

а) в цилиндрической полости

$$E_{r2} = -i\int_{-\infty}^{+\infty} \gamma v_2 \left[A_1(\gamma) J_1(v_2 r) + A_2(\gamma) N_1(v_2 r)\right] e^{i\gamma z} d\gamma, \tag{4}$$

$$E_{z2} = \int_{-\infty}^{+\infty} v_2^2 \left[A_1(\gamma) J_0(v_2 r) + A_2(\gamma) N_0(v_2 r)\right] e^{i\gamma z} d\gamma, \tag{5}$$

$$H_{\varphi 2} = -i\omega\varepsilon_{k2}\int_{-\infty}^{+\infty} v_2 \left[A_1(\gamma) J_1(v_2 r) + A_2(\gamma) N_1(v_2 r)\right] e^{i\gamma z} d\gamma, \tag{6}$$

б) в поглощающей среде

$$E_{r3} = -i\int_{-\infty}^{+\infty} \gamma v_3 A_3(\gamma)\, H_1^{(1)}(v_3 r)\, e^{i\gamma z} d\gamma, \tag{7}$$

$$E_{z3} = \int_{-\infty}^{+\infty} v_3^2 A_3(\gamma)\, H_0^{(1)}(v_3 r)\, e^{i\gamma z} d\gamma, \tag{8}$$

$$H_{\varphi 3} = -i\omega\varepsilon_{k3}\int_{-\infty}^{+\infty} v_3 A_3(\gamma)\, H_1^{(1)}(v_3 r)\, e^{i\gamma z} d\gamma. \tag{9}$$

Неизвестные функции $A_1(\gamma)$, $A_2(\gamma)$ и $A_3(\gamma)$ найдем из граничных условий, которые в рассматриваемой задаче имеют вид

$$E_{z2} + E_{\text{стр}} = 0 \qquad \text{при } r = r_0, \tag{10}$$

$$\left.\begin{aligned} E_{z2} &= E_{z3} \\ H_{\varphi 2} &= H_{\varphi 3} \end{aligned}\right\} \qquad \text{при } r = R_0, \tag{11}$$

где $E_{\text{стр}}$ — напряженность поля сторонних сил на поверхности провода.

Подобно тому, как принято в работах [1—3], считаем напряженность поля сторонних сил не равной нулю только на участке провода $0 < z < a$. При этом эдс внешнего источника равна

$$\mathscr{E}_0 = \int_0^a E_{\text{стр}} dz. \tag{12}$$

Напряженность поля $E_{\text{стр}}$, вызванную эдс внешнего источника $\mathscr{E}_0$, можно представить в виде интеграла

$$E_{\text{стр}} = \frac{\mathscr{E}}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin\gamma a}{\gamma a}\, e^{i\gamma z} d\gamma. \tag{13}$$

Введя обозначение

$$K(\gamma) = \frac{\mathcal{E}}{2\pi} \frac{\sin \gamma a}{\gamma a}, \tag{14}$$

получаем

$$E_{\text{стр}} = \int_{-\infty}^{+\infty} K(\gamma)\, e^{i\gamma z}\, d\gamma. \tag{15}$$

Используя граничные условия (10) и (11), получаем систему уравнений

$$J_0(v_2 r_0)\, A_1(\gamma) + N_0(v_2 r_0)\, A_2(\gamma) = -\frac{K(\gamma)}{v_2^2}, \tag{16}$$

$$J_0(v_2 R_0)\, A_1(\gamma) + N_0(v_2 R_0)\, A_2(\gamma) - \frac{v_3^2}{v_2^2} H_0^{(1)}(v_3 R_0)\, A_3(\gamma) = 0, \tag{17}$$

$$J_1(v_2 R_0)\, A_1(\gamma) + N_1(v_2 R_0)\, A_2(\gamma) - \frac{\varepsilon_{k3}}{\varepsilon_{k2}} \frac{v_3}{v_2} H_1^{(1)}(v_3 R_0)\, A_3(\gamma) = 0. \tag{18}$$

Коэффициенты $A_1(\gamma)$, $A_2(\gamma)$ и $A_3(\gamma)$ соответственно равны:

$$A_1(\gamma) = \frac{D_1}{D}, \quad A_2(\gamma) = \frac{D_2}{D}, \quad A_3(\gamma) = \frac{D_3}{D}.$$

Определитель системы уравнений равен

$$D = \frac{v_3^2}{v_2^2} H_0^{(1)}(v_3 R_0) \left[J_0(v_2 r_0)\, N_1(v_2 R_0) - J_1(v_2 R_0)\, N_0(v_2 r_0)\right] -$$

$$- \frac{\varepsilon_{k3}}{\varepsilon_{k2}} \frac{v_3}{v_2} H_1^{(1)}(v_3 R_0) \left[J_0(v_2 r_0)\, N_0(v_2 R_0) - J_0(v_2 R_0)\, N_0(v_2 r_0)\right]. \tag{19}$$

Определители D_1, D_2 и D_3 соответственно равны:

$$D_1 = -\frac{K(\gamma)}{v_2^2} \left[\frac{v_3^2}{v_2^2} H_0^{(1)}(v_3 R_0)\, N_1(v_2 R_0) - \frac{\varepsilon_{k3}}{\varepsilon_{k2}} \frac{v_3}{v_2} H_1^{(1)}(v_3 R_0)\, N_0(v_2 R_0)\right], \tag{20}$$

$$D_2 = -\frac{K(\gamma)}{v_2^2} \left[\frac{\varepsilon_{k3}}{\varepsilon_{k2}} \frac{v_3}{v_2} H_1^{(1)}(v_3 R_0)\, J_0(v_2 R_0) - \frac{v_3^2}{v_2^2} H_0^{(1)}(v_3 R_0)\, J_1(v_2 R_0)\right], \tag{21}$$

$$D_3 = -\frac{K(\gamma)}{v_2^2} \left[J_0(v_2 R_0)\, N_1(v_2 R_0) - J_1(v_2 R_0)\, N_0(v_2 R_0)\right]. \tag{22}$$

2. ВЫВОД УРАВНЕНИЯ ТОКА В ПРОВОДЕ

Ток в проводе I_z связан с составляющей $H_{\varphi 2}$ поля в цилиндрической полости, заполненной диэлектриком, соотношением

$$I_z = 2\pi r H_{\varphi 2}. \tag{23}$$

Это соотношение справедливо в том случае, когда $r \ll \lambda$. В рассматриваемой задаче указанное неравенство выполняется, так как толщина цилиндрической полости, равная $R_0 - r_0$, значительно меньше длины волны.

Подставив в (6) значения $A_1(\gamma)$ и $A_2(\gamma)$, имеем

$$H_{\varphi 2} = -i\omega\varepsilon_{k2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{D_{\varphi 2} K(\gamma)}{v_2 D} e^{i\gamma z} d\gamma. \tag{24}$$

Подставив значение $K(\gamma)$ из (14) в (24), получим

$$H_{\varphi 2} = -\frac{i\omega\varepsilon_{k2}\mathcal{E}}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{D_{\varphi 2}}{v_2 D} \frac{\sin \gamma a}{\gamma a} e^{i\gamma z} d\gamma. \tag{25}$$

При малой толщине слоя изоляции по сравнению с длиной волны, при-

Таблица 1

Частота f, гц	$k_2\left(\varepsilon'_2=3,\ \sigma_2=0\right)$	Морская вода $\left(\varepsilon'_3=80,\ \sigma_3=4\frac{1}{ом\cdot м}\right)$		Влажная почва $\left(\varepsilon'_3=10,\sigma_3=5\cdot10^{-2}\frac{1}{ом\cdot м}\right)$		Сухая почва $\left(\varepsilon'_3=4,\ \sigma_3=10^{-3}\frac{1}{ом\cdot м}\right)$	
		k_3	γ_{p_1}	k_3	γ_{p_1}	k_3	γ_{p_1}
$6\cdot10^3$	0,0002176559	0,307813+ + i0,307811	0,0005565+ + i0,0000304	0,03441557+ + i0,0344132	0,0006357+ + i0,0002668	0,004870181+ + i0,0048369	0,0006585152+ + i0,0000273291
$3\cdot10^4$	0,001088279	0,6882997+ + i0,688277	0,0026224+ + i0,0016143	0,0769653+ + i0,007694	0,0030388+ + i0,00148279	0,0109193+ + i0,01084658	0,00357081+ + i0,0001936987
$3\cdot10^5$	0,01088279	2,176922+ + i2,176197	0,023748+ + i0,0017835	0,2437526+ + i0,2429414	0,0286236+ + i0,0015743	0,03558002+ + i0,033287	0,02953152+ + i0,0061077
$3\cdot10^6$	0,01088279	6,894364+ + i6,871423	0,20989+ + i0,02024	0,7824601+ + i0,7568128	0,258337+ + i0,0219342	0,148761+ + i0,0796144	0,1506621+ + i0,0597037
$3\cdot10^7$	1,088279	22,13131+ + i21,4059	1,782413+ + i0,243579	2,866357+ + i2,065953	2,109522+ + i0,4364983	1,260147+ + i0,09398566	1,229379+ + i0,07996127

нимая $r = R_0$, получим

$$D_{\varphi 2} = \frac{2\varepsilon_{k3} v_3}{\pi R_0 \varepsilon_{k2} v_2^2} H_1^{(1)}(v_3 R_0). \quad (26)$$

Подставив (26) в (25) и устремив $a \to 0$, находим

$$H_{\varphi 2} = -i\frac{\omega\varepsilon_{k3}\mathscr{E}}{\pi^2 R_0}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{v_3}{v_2^3 D} H_1^{(1)}(v_3 R_0)\, e^{i\gamma z} d\gamma. \quad (27)$$

На основании (23) имеем

$$I_z = -i\frac{2\omega\varepsilon_{k3}\mathscr{E}}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{v_3}{v_2^3 D} H_1^{(1)}(v_3 R_0)\, e^{i\gamma z}\, d\gamma. \quad (28)$$

Функции $v_2 = \sqrt{k_2^2 - \gamma^2}$ и $v_3 = \sqrt{k_3^2 - \gamma^2}$ являются двухзначными функциями на плоскости комплексного переменного γ. Точками разветвления этих функций являются $\gamma = \pm k_2$, $\gamma = \pm k_3$.

Подынтегральное выражение, представляющее собой сложную функцию элементарных функций v_2 и v_3, имеет также две точки разветвления. Кроме указанных особых точек подынтегральная функция имеет полюс при $D = 0$, $\gamma = \gamma_{p1}$.

Приравнивая (19) нулю, получаем

$$\frac{J_0(v_2 r_0) N_1(v_2 R_0) - J_1(v_2 R_0) N_0(v_2 r_0)}{J_0(v_2 r_0) N_0(v_2 R_0) - J_0(v_2 R_0) N_0(v_2 r_0)} = \frac{\varepsilon_{k3}}{\varepsilon_{k2}}\frac{v_2}{v_3}\frac{H_1^{(1)}(v_3 R_0)}{H_0^{(1)}(v_3 R)}. \quad (29)$$

Ввиду сложности решить уравнение (29) относительно постоянной γ без упрощения практически невозможно.

Учитывая, что при $r_0 < R_0 \ll 1$ имеет место $|v_2 r_0| < |v_2 R_0| \ll 1$, $|v_3 r_0| < |v_3 R_0| \ll 1$, заменим цилиндрические функции первыми членами разложения их в ряды. Отбросив члены высшего порядка малости, получим

$$(k_0^2\varepsilon'_{k3} - \gamma^2)\left(\ln\frac{1{,}12}{R_0\sqrt{k_0^2\varepsilon_{k3} - \gamma^2}} + i\frac{\pi}{2}\right) = -\frac{\varepsilon'_{k3}}{\varepsilon'_{k2}}(k_0^2\varepsilon'_{k2} - \gamma^2)\ln\frac{R_0}{r_0}. \quad (30)$$

В табл. 1 приведены значения волнового числа k_3 и постоянной разделения γ_{p1}, вычисленные для морской воды, влажной и сухой почв. Постоянная разделения γ_{p1} вычислена при $R_0/r_0 = 3$ ($R_0 = 6$ *мм*). В табл. 1 приведены также значения волнового числа k_2, вычисленного при $\varepsilon_2' = 3$, $\sigma_2 = 0$. Если пренебречь потерями в изоляции провода ($\sigma_2 = 0$), то точки разветвления $\gamma = \pm k_2$ будут расположены на вещественной оси. Точки разветвления $\gamma = \pm k_3$ для всех сред лежат вблизи полюса. Как видно из табл. 1, удаление этих точек от полюса зависит от проводимости среды и частоты. В случае морской воды удаление точек разветвления от полюса выражено в большей степени, чем в случае сухой и влажной почв.

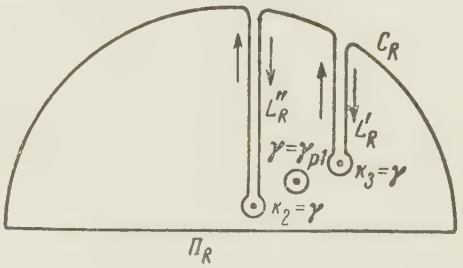


Рис. 2

После того как выяснены особые точки подынтегральной функции, можно применить известный метод получения асимптотического выражения для интеграла (28).

В случае, когда подынтегральная функция содержит множитель $e^{i\gamma z}$ и координата z — положительная, выбираем ветви функций v_2 и v_3, которым соответствуют корни $\gamma = k_2$ и $\gamma = k_3$, а также выбираем корень $\gamma = \gamma_{p1}$ уравнения $D = 0$. В дальнейшем индекс у γ опустим.

В результате этого мы приходим к контуру интегрирования, изображенному на рис. 2. Радиус дуг C_R принимаем весьма большим ($R \to \infty$). Обозначим через L_R кривую, состоящую из двубережного разреза, параллельного положительной оси β и малой окружности, обходящей точку $\kappa_3 = \gamma$. Аналогично обозначим через L_R'' кривую, состоящую из двубережного разреза, параллельного положительной оси β и малой окружности, обходящей точку $k_2 = \gamma$.

На основании теоремы о вычетах интеграл выражения (28) равен

$$\mathcal{J} = \int\limits_{\Pi_R + C_R + L_R' + L_R''} \frac{v_3}{v_2^3 D} H_1^{(1)}(v_3 R_0)\, e^{i\gamma z}\, d\gamma = 2\pi i R(z), \qquad (31)$$

где $R(z)$ — вычет подынтегральной функции в точке $\gamma = \gamma_{p1}$.

При радиусе $R \to \infty$ и $z \neq 0$ согласно лемме Жордана интеграл вдоль дуг C_R стремится к нулю.

Вычисление интеграла по разрезу L_R'. Обозначим через $\mathcal{J}_{L_R'}$ интеграл по разрезу L_R':

$$\mathcal{J}_{L_R'} = \int\limits_{L_R'} \frac{H_1^{(1)}(v_3 R_0)\, e^{i\gamma z} d\gamma}{v_3 H_0^{(1)}(v_3 R_0)\Phi_1(\gamma) - H_1^{(1)}(v_3 R_0)\,\Phi_2(\gamma)}, \qquad (32)$$

где

$$\Phi_1(\gamma) \equiv v_2 [J_0(v_2 r_0) N_1(v_2 R_0) - J_1(v_2 R_0) N_0(v_2 r_0)]; \qquad (33)$$

$$\Phi_2(\gamma) \equiv \frac{\varepsilon_{k3}}{\varepsilon_{k2}} v_2^2 [J_0(v_2 r_0) N_0(v_2 R_0) - J_0(v_2 R_0) N_0(v_2 r_0)]. \qquad (34)$$

Произведя замену

$$k_3 - \gamma = s, \quad d\gamma = -ds,$$

получаем (рис. 3)

$$\int\limits_{L_R} = \int\limits_{-iR}^{i\rho} + \int\limits_{-i\rho}^{-iR} + \oint\limits_{C_\rho}.$$

При $\rho \to 0$ интеграл по окружности C_ρ стремится к нулю. На первом берегу (см. рис. 3)

$$s = \tau e^{i\frac{3\pi}{2}}, \quad v_{31} = \sqrt{\tau e^{i\frac{3\pi}{2}}(2k_3 + i\tau)}, \quad d\gamma = -e^{i\frac{3\pi}{2}} d\tau.$$

На втором берегу

$$s = \tau e^{-i\frac{\pi}{2}}, \quad v_{32} = \sqrt{\tau e^{-i\frac{\pi}{2}}(2k_3 + i\tau)}, \quad d\gamma = -e^{-i\frac{\pi}{2}} d\tau.$$

Таким образом, имеем

$$\mathcal{J}_{L'_R} = -ie^{ik_3 z}\int_\rho^R \left\{ \frac{H_1^{(1)}(e^{i\pi} v_{32} R_0)}{e^{i\pi} v_{32} H_0^{(1)}(e^{i\pi} v_{32} R_0)\,\Phi_1(k_3 + i\tau) - H_1^{(1)}(e^{i\pi} v_{32} R_0)\,\Phi_2(k_3 + i\tau)} - \right.$$
$$\left. - \frac{H_1^{(1)}(v_{32} R_0)}{v_{32} H_0^{(1)}(v_{32} R_0)\,\Phi_1(k_3 + i\tau) - H_1^{(1)}(v_{32} R_0)\,\Phi_2(k_3 + i\tau)} \right\} e^{-z\tau} d\tau. \qquad (35)$$

Используя формулу

$$H_p^{(1)}(e^{i\pi} z) = -e^{-i\pi\rho} H_p^{(2)}(z)$$

и устремляя $\rho \to 0$ и $R \to \infty$, получаем

$$\mathcal{J}_{L'_R} = -ie^{ik_3 z}\int_0^\infty \left[\frac{H_1^{(2)}(v_{32} R_0)}{v_{32} H_0^{(2)}(v_{32} R_0)\,\Phi_1(k_3 + i\tau) - H_1^{(2)}(v_{32} R_0)\,\Phi_2(k_3 + i\tau)} - \right.$$
$$\left. - \frac{H_1^{(1)}(v_{32} R_0)}{v_{32} H_0^{(1)}(v_{32} R_0)\,\Phi_1(k_3 + i\tau) - H_1^{(1)}(v_{32} R_0)\,\Phi_2(k_3 + i\tau)} \right] e^{-z\tau} d\tau. \qquad (36)$$

При малых значениях радиуса R_0 в диапазоне частот от $6 \cdot 10^3$ до $3 \cdot 10^7$ *гц* для морской воды, влажной и сухой почв заменим цилиндрические функции первыми членами разложения их в ряды. Как показывает

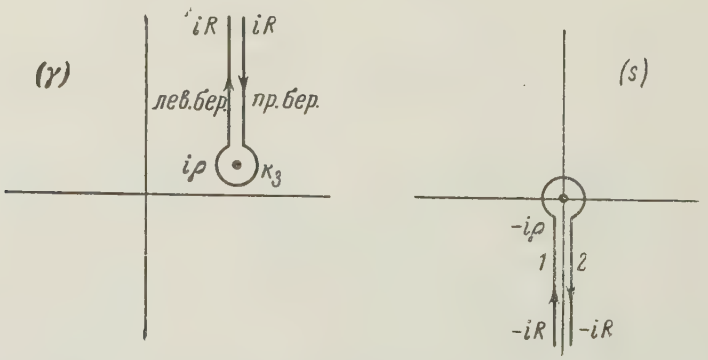


Рис. 3

исследование подынтегральной функции, верхний предел интегрирования вполне достаточно ограничить числом m, определяемым на основании неравенства

$$|v_{32}| R_0 = \left|\sqrt{-i\tau(2k_3 + i\tau)}\right| R_0 \ll 1 \qquad (37)$$

или

$$\left|\sqrt{-i\tau(2k_3 + i\tau)}\right| = \frac{1}{\alpha R_0} \text{ при } \alpha \gg 1. \qquad (38)$$

Полагая, что

$$k_3 = \frac{2\pi}{\lambda}\sqrt{\varepsilon'_{k3}} = n + ip, \tag{39}$$

уравнение (38) запишем в виде

$$\tau^4 + 4p\tau^3 + 4(n^2 + p^2)\tau^2 - \frac{1}{(\alpha R_0)^4} = 0. \tag{40}$$

Верхний предел интеграла m является корнем уравнения (40). Величина $\tau = m$ измеряется в неперах на метр.

Таблица 2

Частота f, *гц*	Морская вода ($\varepsilon'_3 = 80$, $\sigma_3 = 4\frac{1}{ом\cdot м}$)	Влажная почва ($\varepsilon'_3 = 10$, $\sigma_3 = 5\cdot10^{-2}\frac{1}{ом\cdot м}$)	Сухая почва ($\varepsilon'_3 = 4$, $\sigma_3 = 10^{-3}\frac{1}{ом\cdot м}$)
$6\cdot10^3$	16,35601	16,65725	16,65127
$3\cdot10^4$	15,97217	16,59444	16,63224
$3\cdot10^5$	14,44514	16,42194	16,55784
$3\cdot10^6$	10,08883	15,89038	16,33311
$3\cdot10^7$	4,29713	14,13788	15,75743

В табл. 2 приведены корни уравнения (40), вычисленные для морской воды, влажной и сухой почв при $R_0 = 6$ *мм* и $\alpha = 10$.

Выполнив преобразования и отбросив члены высшего порядка малости, имеем

$$\mathcal{J}'_{L_R} = -i\frac{\pi}{2}e^{ik_3 z}\left\{\int_0^m \frac{e^{-z\tau}d\tau}{\frac{\pi}{2}\tau(2k_3 + i\tau) - \frac{\tau}{2}i(2k_3 + i\tau)\ln[-i\tau(2k_3 + i\tau)R_0^2] + \right.$$
$$+ (k_3^2 - k_2^2 + i2k_3\tau - \tau^2)\frac{\varepsilon_{k3}}{\varepsilon_{k2}}\ln\frac{R_0}{r_0}} -$$
$$- \int_0^m \frac{e^{-z\tau}d\tau}{-\frac{\pi}{2}\tau(2k_3 + i\tau) - i\frac{\tau}{2}(2k_3 + i\tau)\ln[-i\tau(2k_3 + i\tau)R_0^2] + \left.\right.$$
$$\left. + (k_3^2 - k_2^2 + i2k_3\tau - \tau^2)\frac{\varepsilon_{k3}}{\varepsilon_{k2}}\ln\frac{R_0}{r_0}}\right\}. \tag{41}$$

Этот интеграл можно вычислить приближенно для каждой среды в отдельности.

а) Морская вода. В диапазоне частот от $6\cdot10^3$ до $3\cdot10^7$ *гц* в знаменателе подынтегральной функции (41) можно пренебречь слагаемым $-i\tau(2k_3 + i\tau)\ln[-i\tau(2k_3 + i\tau)R_0^2]$.

В результате получаем

$$\mathcal{J}_{L'_R} = -i\frac{\pi}{2}e^{ik_3 z}\left\{\int_0^m \frac{e^{-z\tau}d\tau}{a_1\tau^2 + b_1\tau + c_1} - \int_0^m \frac{e^{-z\tau}d\tau}{a_2\tau^2 + b_2\tau + c_1}\right\}, \tag{42}$$

где

$$a_1 = i\frac{\pi}{2} - \frac{\varepsilon_{k3}}{\varepsilon_{k2}}\ln\frac{R_0}{r_0}; \tag{43}$$

$$b_1 = k_3\left(\pi + i2\frac{\varepsilon_{k3}}{\varepsilon_{k2}}\ln\frac{R_0}{r_0}\right); \tag{44}$$

$$a_2 = -i\frac{\pi}{2} - \frac{\varepsilon_{k3}}{\varepsilon_{k2}}\ln\frac{R_0}{r_0}; \tag{45}$$

$$b_2 = k_3\left(-\pi + i2\frac{\varepsilon_{k3}}{\varepsilon_{k2}}\ln\frac{R_0}{r_0}\right); \tag{46}$$

$$c_1 = (k_3^2 - k_2^2)\frac{\varepsilon_{k3}}{\varepsilon_{k2}}\ln\frac{R_0}{r_0}. \tag{47}$$

Функция

$$\frac{1}{a\tau^2 + b\tau + c} = \sum_{n=0}^{\infty} A_n\tau^n. \tag{48}$$

Таким образом, получаем

$$\mathcal{J}_{L'_R} = -i\frac{\pi}{2}e^{ik_3z}\left(\int_0^m \sum_{n=0}^{\infty} A_n^{(1)}\tau^n e^{-z\tau}d\tau - \int_0^m \sum_{n=0}^{\infty} A_n^{(2)}\tau^n e^{-z\tau}d\tau\right). \tag{49}$$

Вычислив коэффициенты ряда (49), имеем

$$\mathcal{J}_{L'_R} = -i\frac{\pi}{2}e^{ik_3z}\left\{\frac{b_2 - b_1}{c_1^2}\int_0^m \tau e^{-z\tau}d\tau + \frac{a_2c_1 - b_2^2 - a_1c_1 + b_1^2}{c_1^3}\int_0^m \tau^2 e^{-z\tau}d\tau + \ldots\right\}. \tag{50}$$

Ограничив ряд вторым членом и вычислив интегралы (50), находим

$$\mathcal{J}_{L'_R} = -i\frac{\pi}{2}e^{ik_3z}\left\{-\frac{b_2 - b_1}{c_1^2}\left(\frac{m}{z} + \frac{1}{z^2}\right)e^{-mz} - \frac{(a_2 - a_1)c_1 + b_1^2 - b_2^2}{c_1^3} \times \right.$$

$$\left. \times\left(\frac{m^2}{z} + \frac{2m}{z^2} + \frac{2}{z^3}\right)e^{-mz} + \frac{b_2 - b_1}{c_1^2z^2} + 2\frac{(a_2 - a_1)c_1 + b_1^2 - b_2^2}{c_1^3z^3}\right\}. \tag{51}$$

б) В л а ж н а я п о ч в а. В диапазоне частот от $6 \cdot 10^3$ до $3 \cdot 10^6$ *гц* в знаменателе подынтегральной функции (41) можно пренебречь слагаемым $i\tau(2k_3 + i\tau)\ln[-i\tau(2k_3 + i\tau)R_0^2]$.

Следовательно, в указанном диапазоне частот интеграл $\mathcal{J}_{L'_R}$ будет определяться выражением (51). В диапазоне частот от $3 \cdot 10^6$ до $3 \cdot 10^7$ *гц* выражение (41) целесообразно записать в следующем виде:

$$\mathcal{J}_{L'_R} = -i\frac{\pi}{2}e^{ik_3z}(\mathcal{J}_1 + \mathcal{J}_2), \tag{52}$$

где

$$\mathcal{J}_1 = \int_0^1 \frac{e^{-z\tau}d\tau}{\frac{\pi}{2}\tau(2k_3 + i\tau) - i\frac{\tau}{2}(2k_3 + i\tau)\ln[-i\tau(2k_3 + i\tau)R_0^2] + \rightarrow}$$

$$\rightarrow \frac{e^{-z\tau}d\tau}{+(k_3^2 - k_2^2 + i2k_3\tau - \tau^2)\frac{\varepsilon_{k3}}{\varepsilon_{k2}}\ln\frac{R_0}{r_0}} -$$

$$-\int_0^1 \frac{e^{-z\tau}d\tau}{+\frac{\pi}{2}\tau(2k_3 + i\tau) - i\frac{\tau}{2}(2k_3 + i\tau)\ln[-i\tau(2k_3 + i\tau)R_0^2] + \rightarrow}$$

$$\rightarrow \frac{e^{-z\tau}d\tau}{+(k_3^2 - k_2^2 + i2k_3\tau - \tau^2)\frac{\varepsilon_{k3}}{\varepsilon_{k2}}\ln\frac{R_0}{r_0}}; \tag{53}$$

$$\mathcal{J}_2 = \int_1^m \frac{e^{-z\tau}d\tau}{\frac{\pi}{2}\tau(2k_3+i\tau) - i\frac{\tau}{2}(2k_3+i\tau)\ln[-i\tau(2k_3+i\tau)R_0^2] + \rightarrow} \rightarrow$$

$$\rightarrow \frac{e^{-z\tau}d\tau}{+(k_3^2-k_2^2+i2k_3\tau-\tau^2)\frac{\varepsilon_{k3}}{\varepsilon_{k2}}\ln\frac{R_0}{r_0}} -$$

$$-\int_1^m \frac{e^{-z\tau}d\tau}{-\frac{\pi}{2}\tau(2k_3+i\tau) - i\frac{\tau}{2}(2k_3+i\tau)\ln[-i\tau(2k_3+i\tau)R_0^2] + \rightarrow} \rightarrow$$

$$\rightarrow \frac{e^{-z\tau}d\tau}{+(k_3^2-k_2^2+i2k_3\tau-\tau^2)\frac{\varepsilon_{k3}}{\varepsilon_{k2}}\ln\frac{R_0}{r_0}}. \qquad (54)$$

Как показали расчеты, при вычислении интеграла $\mathcal{J}_1$ в знаменателе подынтегральной функции можно пренебречь слагаемым $-i\frac{\tau}{2}(2k_3+i\tau)\cdot$ $\cdot\ln[-i\tau(2k_3+i\tau)R_0^2]$.

В результате интеграл $\mathcal{J}_1$ будет равен

$$\mathcal{J}_1 = -\frac{b_2-b_1}{c_1^2}\left(\frac{1}{z}+\frac{1}{z^2}\right)e^{-z} - \frac{(a_2-a_1)c_1+b_1^2-b_2^2}{c_1^3}\left(\frac{1}{z}+\frac{2}{z^2}+\frac{2}{z^3}\right)e^{-z} +$$

$$+\frac{b_2-b_1}{c_1^2z^2}+2\frac{(a_2-a_1)c_1+b_1^2-b_2^2}{c_1^3z^3}. \qquad (55)$$

С увеличением τ модуль знаменателя подынтегральной функции (55) растет. При $\tau > 1$ значение модуля знаменателя подынтегральной функции (55) велико, в то время как модуль экспоненциальной функции в числителе подынтегрального выражения весьма мал при $z > 1$.

Следовательно, при $z > 1$ интеграл $\mathcal{J}_1$ дает главную часть решения, в то время как интеграл $\mathcal{J}_2$ является только поправкой. Очевидно, при расчетах интегралом $\mathcal{J}_2$ можно пренебречь при $z > 1$. Интеграл $\mathcal{J}_2$ имеет существенное значение только при $z < 1$.

Интеграл $\mathcal{J}_2$ необходимо вычислять численным методом. Однако, учитывая монотонный характер изменения логарифмической функции с увеличением τ от 1 до m, при вычислении интеграла $\mathcal{J}_2$ под знаком логарифма приближенно можно принять $\tau = 1$, т. е. интеграл $\mathcal{J}_2$ равен

$$\mathcal{J}_2 = \int_1^m \frac{e^{-z\tau}d\tau}{\frac{\pi}{2}\tau(2k_3+i\tau) - i\frac{\tau}{2}(2k_3+i\tau)\ln[(-i2k_3+1)R_0^2] + \rightarrow} \rightarrow$$

$$\rightarrow \frac{e^{-z\tau}d\tau}{+(k_3^2-k_2^2+i2k_3\tau-\tau^2)\frac{\varepsilon_{k3}}{\varepsilon_{k2}}\ln\frac{R_0}{r_0}} -$$

$$-\int_1^m \frac{e^{-z\tau}d\tau}{-\frac{\pi}{2}\tau(2k_3+i\tau) - i\frac{\tau}{2}(2k_3+i\tau)\ln[(-i2k_3+1)R_0^2] + \rightarrow} \rightarrow$$

$$\rightarrow \frac{e^{-z\tau}d\tau}{+(k_3^2-k_2^2+i2k_3\tau-\tau^2)\frac{\varepsilon_{k3}}{\varepsilon_{k2}}\ln\frac{R_0}{r_0}}. \qquad (56)$$

В результате получаем

$$\mathcal{J}_2 = \int_1^m \frac{e^{-z\tau}d\tau}{a_3\tau^2 + b_3\tau + c_2} - \int_1^m \frac{e^{-z\tau}d\tau}{a_4\tau^2 + b_4\tau + c_2}, \tag{57}$$

где

$$a_3 = i\frac{\pi}{2} + \frac{1}{2}\ln\left[(-i2k_3 + 1)R_0^2\right] - \frac{\varepsilon_{k3}}{\varepsilon_{k2}}\ln\frac{R_0}{r_0};$$

$$b_3 = \pi k_3 - ik_3\ln\left[(-i2k_3 + 1)R_0^2\right] + i2k_3\frac{\varepsilon_{k3}}{\varepsilon_{k2}}\ln\frac{R_0}{r_0};$$

$$a_4 = -i\frac{\pi}{2} + \frac{1}{2}\ln\left[(-i2k_3 + 1)R_0^2\right] - \frac{\varepsilon_{k3}}{\varepsilon_{k2}}\ln\frac{R_0}{r_0};$$

$$b_4 = -\pi k_3 - ik_3\ln\left[(-i2k_3 + 1)R_0^2\right] + i2k_3\frac{\varepsilon_{k3}}{\varepsilon_{k2}}\ln\frac{R_0}{r_0};$$

$$c_2 = (k_3^2 - k_2^2)\frac{\varepsilon_{k3}}{\varepsilon_{k2}}\ln\frac{R_0}{r_0}.$$

По аналогии с предыдущим выражение (57) запишем в следующем виде

$$\mathcal{J}_2 = \frac{b_1 - b_3}{c_2^2}\int_1^m \tau e^{-z\tau}d\tau + \frac{a_4c_2 - b_4^2 - a_3c_2 + b_3^2}{c_2^3}\int_1^m \tau^2 e^{-z\tau}d\tau + \ldots. \tag{58}$$

Ограничив ряд вторым членом и вычислив интегралы, находим

$$\mathcal{J}_2 = -\frac{b_4 - b_3}{c_2^2}\left[e^{-mz}\left(\frac{m}{z} + \frac{1}{z^2}\right) - e^{-z}\left(\frac{1}{z} + \frac{1}{z^2}\right)\right] -$$

$$-\frac{a_4c_2 - b_4^2 - a_3c_2 + b_3^2}{c_2^3}\left[e^{-mz}\left(\frac{m^2}{z} + \frac{2m}{z^2} + \frac{2}{z^3}\right) - e^{-z}\left(\frac{1}{z} + \frac{2}{z^2} + \frac{2}{z^3}\right)\right]. \tag{59}$$

В формулах (55) и (59) расстояние z выражено в метрах.

в) Сухая почва. В диапазоне частот до $3\cdot10^5$ *гц* включительно интеграл (41) имеет вид (52). Интеграл $\mathcal{J}_1$ приближенно можно вычислить по формуле (55). Интеграл $\mathcal{J}_2$ приближенно вычисляется по формуле (59).

На частотах выше $3\cdot10^5$ *гц* интеграл $\mathcal{J}_1$ необходимо вычислять численным методом.

Вычисление интеграла по разрезу L_R''. Интеграл по разрезу L_R'' запишем в виде

$$\mathcal{J}_{L_R''} = \int_{L_R''} \frac{H_1^{(1)}(v_3R_0)\,e^{i\gamma z}d\gamma}{v_2\left[\mathcal{J}_0(v_2r_0)\,N_1(v_2R_0) - \mathcal{J}_1(v_2R_0)\,N_0(v_2r_0)\right]v_3H_0^{(1)}(v_3R_0) -} \rightarrow$$

$$\rightarrow \frac{H_1^{(1)}(v_3R_0)\,e^{i\gamma z}d\gamma}{-v_2^2\left[\mathcal{J}_0(v_2r_0)\,N_0(v_2R_0) - \mathcal{J}_0(v_2R_0)\,N_0(v_2r_0)\right]\dfrac{\varepsilon_{k3}}{\varepsilon_{k2}}H_1^{(1)}(v_3R_0)}. \tag{60}$$

Произведя замену

$$k_2 - \gamma = \sigma, \quad d\gamma = -d\sigma,$$

получим

$$\mathcal{J}_{L''_R} = -ie^{ik_2 z}\int_{\rho}^{R}\left\{\frac{H_1^{(1)}(v_3R_0)}{v_{21}\left[\mathcal{J}_0(v_{21}r_0)N_1(v_{21}R_0)-\mathcal{J}_1(v_{21}R_0)N_0(v_{21}r_0)\right]v_3H_0^{(1)}(v_3R_0)-}\right.\rightarrow$$

$$\rightarrow\frac{H_1^{(1)}(v_3R_0)}{-v_{21}^2\left[\mathcal{J}_0(v_{21}r_0)N_0(v_{21}R_0)-\mathcal{J}_0(v_{21}R_0)N_0(v_{21}r_0)\right]\dfrac{\varepsilon_{k3}}{\varepsilon_{k2}}H_1^{(1)}(v_3R_0)}-$$

$$-\frac{H_1^{(1)}(v_3R_0)}{v_{22}\left[\mathcal{J}_0(v_{22}r_0)N_1(v_{22}R_0)-\mathcal{J}_1(v_{22}R_0)N_0(v_{22}r_0)\right]v_3H_0^{(1)}(v_3R_0)-}\rightarrow$$

$$\left.\rightarrow\frac{H_1^{(1)}(v_3R_0)}{-v_{22}^2\left[\mathcal{J}_0(v_{22}r_0)N_0(v_{22}R_0)-\mathcal{J}_0(v_{22}R_0)N_0(v_{22}r_0)\right]\dfrac{\varepsilon_{k3}}{\varepsilon_{k2}}H_1^{(1)}(v_3R_0)}\right\}e^{-uz}\,du, \qquad (61)$$

где

$$v_3=\sqrt{k_3^2-(k_2+iu)^2};\quad v_{21}=\sqrt{ue^{i\frac{3\pi}{2}}(2k_2+iu)};$$

$$v_{22}=\sqrt{ue^{-i\frac{\pi}{2}}(2k_2+iu)}.$$

Используя формулы

$$\mathcal{J}_p(e^{i\pi}z)=e^{i\pi p}\mathcal{J}_p(z),$$

$$N_p(e^{i\pi}z)=e^{-i\pi p}N_p(z)+2i\cos p\pi\,\mathcal{J}_p(z)$$

и устремляя $\rho\to 0$ и $R\to\infty$, получаем

$$\mathcal{J}_{L''_R} = -ie^{ik_2 z}\int_{0}^{\infty}\left\{\frac{H_1^{(1)}(v_3R_0)}{v_{22}\left[\mathcal{J}_0(v_{22}r_0)N_1(v_{22}R_0)-\mathcal{J}_1(v_{22}R_0)N_0(v_{22}r_0)\right]v_3H_0^{(1)}(v_3R_0)-}\right.\rightarrow$$

$$\rightarrow\frac{H_1^{(1)}(v_3R_0)}{-v_{22}^2\left[\mathcal{J}_0(v_{22}r_0)N_0(v_{22}R_0)-\mathcal{J}_0(v_{22}R_0)N_0(v_{22}r_0)\right]\dfrac{\varepsilon_{k3}}{\varepsilon_{k2}}H_1^{(1)}(v_3R_0)}-$$

$$-\frac{H_1^{(1)}(v_3R_0)}{v_{22}\left[\mathcal{J}_0(v_{22}r_0)N_1(v_{22}R_0)-\mathcal{J}_1(v_{22}R_0)N_0(v_{22}r_0)\right]v_3H_0^{(1)}(v_3R_0)-}\rightarrow$$

$$\left.\rightarrow\frac{H_1^{(1)}(v_3R_0)}{-v_{22}^2\left[\mathcal{J}_0(v_{22}r_0)N_0(v_{22}R_0)-\mathcal{J}_0(v_{22}R_0)N_0(v_{22}r_0)\right]\dfrac{\varepsilon_{k3}}{\varepsilon_{k2}}H_1^{(1)}(v_3R_0)}\right\}e^{-uz}du=0. \qquad (62)$$

Определение вычета подынтегральной функции. Обозначим

$$\varphi(\gamma)=\frac{v_3}{v_2^3}H_1^{(1)}(v_3R_0)\,e^{i\gamma z}. \qquad (63)$$

Вычет подынтегральной функции в точке $\gamma=\gamma_{p1}$ равен

$$R(z)=\frac{\varphi(\gamma)\big|_{\gamma=\gamma_{p1}}}{\dfrac{dD}{d\gamma}\Big|_{\gamma=\gamma_{p1}}}. \qquad (64)$$

Найдем $\left.\frac{dD}{d\gamma}\right|_{\gamma=\gamma_{p1}}$. В выражении (19) заменим цилиндрические функции первыми членами разложения их в ряды. В результате этого получаем

$$D = \frac{v_3^2}{v_2^2}\left(1 - i\,\frac{2}{\pi}\ln\frac{1{,}12}{v_3R_0}\right)\left[-\frac{2}{\pi}\frac{1}{v_2R_0} + \frac{v_2R_0}{2}\frac{2}{\pi}\ln\frac{1{,}12}{v_2r_0}\right] -$$

$$- \frac{\varepsilon_{k3}}{\varepsilon_{k2}}\frac{v_3}{v_2}\left(\frac{v_3R_0}{2} - i\,\frac{2}{\pi}\frac{1}{v_3R_0}\right)\left[-\frac{2}{\pi}\ln\frac{1{,}12}{v_2R_0} + \frac{2}{\pi}\ln\frac{1{,}12}{v_2r_0}\right]. \qquad (65)$$

Отбросив величины высшего порядка малости $\frac{v_2R_0}{2}\frac{2}{\pi}\ln\frac{1{,}12}{v_0r_0}$ и $\frac{v_3R_0}{2}$, имеем

$$D = i\,\frac{4}{\pi^2R_0}\frac{\varepsilon_{k3}}{\varepsilon_{k2}v_2}\left\{\frac{v_3^2}{v_2^2}\frac{\varepsilon_{k2}}{\varepsilon_{k3}}\left(\ln\frac{1{,}12}{v_3R_0} + i\,\frac{\pi}{2}\right) + \ln\frac{R_0}{r_0}\right\}. \qquad (66)$$

Дифференцируя (66) и учитывая, что

$$\ln\frac{1{,}12}{v_3R_0} + i\,\frac{\pi}{2} = -\frac{\varepsilon'_{k3}}{\varepsilon'_{k2}}\frac{k_0^2\varepsilon'_{k2} - \gamma^2}{k_0^2\varepsilon'_{k3} - \gamma^2}\ln\frac{R_0}{r_0}, \qquad (67)$$

получим

$$\frac{dD}{d\gamma}\Big|_{\gamma=\gamma_{p1}} = i\,\frac{4\gamma}{\pi^2R_0v_2^3}\left(-2\,\frac{v_3^2 - v_2^2}{v_3^2}\frac{\varepsilon_{k3}}{\varepsilon_{k2}}\ln\frac{R_0}{r_0} + 1\right)\Big|_{\gamma=\gamma_{p1}}. \qquad (68)$$

Подставляя (68) в (64) и опуская индекс у γ_{p1}, находим

$$R(z) = -\,i\,\frac{\pi^2R_0v_3H_1^{(1)}(v_3R_0)\,e^{i\gamma z}}{4\gamma\left(-2\,\frac{v_3^2 - v_2^2}{v_3^2}\frac{\varepsilon_{k3}}{\varepsilon_{k2}}\ln\frac{R_0}{r_0} + 1\right)}. \qquad (69)$$

Принимая

$$H_1^{(1)}(v_3R_0) \simeq -\,i\,\frac{2}{\pi}\frac{1}{v_3R_0},$$

имеем

$$R(z) \simeq -\,\frac{\pi e^{i\gamma z}}{2\gamma\left(-2\,\frac{v_3^2 - v_2^2}{v_3^2}\frac{\varepsilon_{k3}}{\varepsilon_{k2}}\ln\frac{R_0}{r_0} + 1\right)}. \qquad (70)$$

Таким образом, интеграл (31) равен

$$\mathcal{J} = -\,\frac{i\pi^2e^{i\gamma z}}{\gamma\left(-2\,\frac{v_3^2 - v_2^2}{v_3^2}\frac{\varepsilon_{k3}}{\varepsilon_{k2}}\ln\frac{R_0}{r_0} + 1\right)} + \mathcal{J}_{L'_R}. \qquad (71)$$

Подставив (71) в (28), получаем следующее выражение для тока в проводе:

$$I_z = -\,i\,\frac{2\omega\varepsilon_{k3}\mathcal{E}}{\pi}\left(\mathcal{J}_p + \mathcal{J}_{L'_R}\right), \qquad (72)$$

где

$$\mathcal{J}_p = -\,\frac{i\pi^2e^{i\gamma z}}{\gamma\left(-2\,\frac{v_3^2 - v_2^2}{v_3^2}\frac{\varepsilon_{k3}}{\varepsilon_{k2}}\ln\frac{R_0}{r_0} + 1\right)}. \qquad (73)$$

3. ИССЛЕДОВАНИЕ УРАВНЕНИЯ ТОКА В ИЗОЛИРОВАННОМ ПРОВОДЕ

Контурный интеграл выражения (28) для тока в изолированном проводе содержит полюс и две точки разветвления $\gamma = \pm k_2$ и $\gamma = \pm k_3$.

Часть решения, соответствующая полюсу, представляет собой волну тока, распространение которой вдоль провода характеризуется фазовым

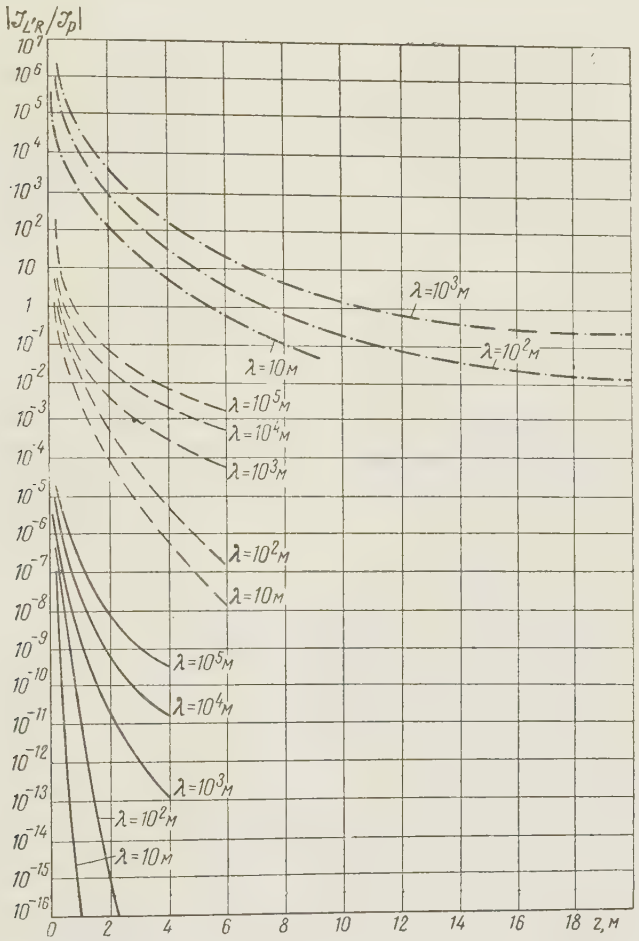


Рис. 4

множителем $e^{i\gamma z}$. Амплитуда этой волны в зависимости от координаты z убывает по экспоненциальному закону $e^{-\beta z}$. Это указывает на то, что вдоль изолированного провода, расположенного в проводящей среде, распространяется поверхностная электромагнитная волна. Эту волну иногда называют кабельной волной.

Как известно, телеграфные уравнения относятся к распространению вдоль линии кабельной волны. Первый член $\mathcal{J}_p$ выражения (72), соответствующий вычету, удовлетворяет телеграфным уравнениям.

Часть решения $\mathcal{J}_{L'R}$, соответствующая особой точке $\gamma = \pm k_3$ в контурном интеграле, представляет собой пространственную волну. Амплитуда этой волны в зависимости от координаты z убывает по весьма сложному закону.

Для того чтобы установить, какая волна тока в изолированном проводе, расположенном в проводящей среде, преобладает, мы произвели

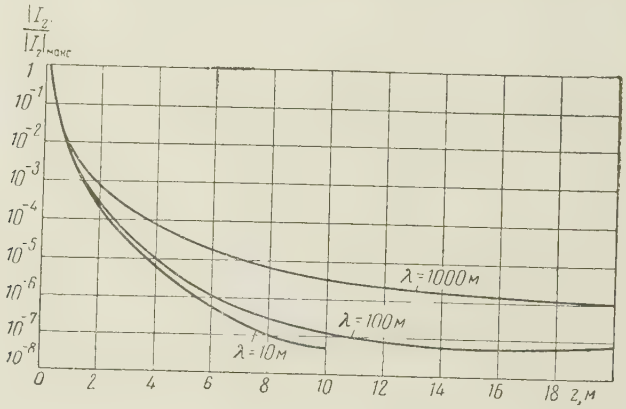


Рис. 5

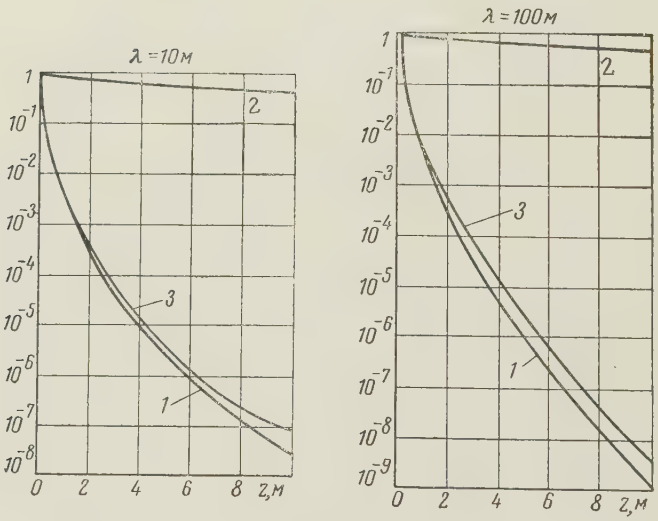


Рис. 6

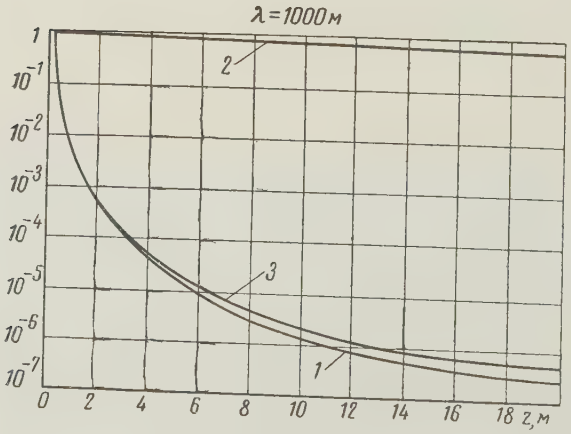


Рис. 7

исследование модуля отношения $|\mathcal{J}_{L'_R}/\mathcal{J}_p|$ в диапазоне коротких, средних и длинных волн для морской воды, влажной и сухой почв. Результаты расчетов представлены на рис. 4 (сплошные кривые — морская вода; пунктир — влажная почва; штрих-пунктир — сухая почва).

Из графиков следует, что при расположении изолированного провода в морской воде, во влажной и сухой почвах при заданном расстоянии от точки приложения эдс величина $|\mathcal{J}_{L'_R}/\mathcal{J}_p|$ убывает с ростом частоты.

При расположении изолированного провода в морской воде и во влажной почве в диапазоне частот от $6\cdot10^3$ до $3\cdot10^7$ *гц* имеет место $|\mathcal{J}_{L'_R}/\mathcal{J}_p|>1$ только на очень малых расстояниях от точки приложения эдс ($z<1$). Следовательно, за исключением небольшого начального участка провода кабельная волна преобладает над пространственной волной. На основании этого можно сделать вывод о применимости телеграфных уравнений в теории изолированного провода, расположенного в морской воде и во влажной почве.

При расположении изолированного провода в сухой почве на частотах ниже $3\cdot10^7$ *гц* неравенство $|\mathcal{J}_{L'_R}/\mathcal{J}_p|<1$ наступает на сравнительно большом расстоянии от точки приложения эдс. Это расстояние тем больше, чем ниже частота.

Кривые распределения амплитуды тока вдоль изолированного провода в сухой почве, изображенные на рис. 5, отличаются от экспоненциальных кривых.

Нормированные графики модулей функций *1* — $|\mathcal{J}_{L'_R}|$, *2* — $|e^{ik_3 z}|$, *3* — $|\varphi(z)|$ (рис. 6, 7) выражения (52) для тока $\mathcal{J}_{L'_R}$ при расположении изолированного провода в сухой почве показывают, что на начальном участке провода ток $\mathcal{J}_{L'_R}$ в диапазоне частот $3\cdot10^5 - 3\cdot10^7$ *гц* в основном определяется быстро изменяющейся функцией $\varphi(z)$.

Автор считает своим долгом выразить благодарность Л. А. Вайнштейну за ценные советы и дискуссию результатов работы.

ЛИТЕРАТУРА

1. В. Н. Кессених, Докл. АН СССР, 1940, 27, 6, 558.
2. В. В. Владимирский, Изв. АН СССР, Сер. физ., 1944, 8, 3, 139.
3. Л. С. Королькевич, Г. А. Лавров, Тр. ЦНИИИС СА, 1951, 2 (85).

Поступила в редакцию
16 VII 1960

РАДИОТЕХНИКА И ЭЛЕКТРОНИКА

1961 № 8

ПЕРЕХОДНАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА КОАКСИАЛЬНОЙ СИСТЕМЫ С ПЕРИОДИЧЕСКОЙ СТРУКТУРОЙ

С. И. Виглин

Составлены телеграфные уравнения для эквивалентной схемы магнитодиэлектрической линии, найдена форма ее переходной характеристики и определена длительность нарастания сигнала в любой точке линии.

ВВЕДЕНИЕ

В последние годы предложен [1, 2, 3] ряд конструкций коаксиальных систем с периодической структурой, которые можно успешно применять для формирования и задержки коротких видеоимпульсов. В отличие от однородной коаксиальной линии эти конструкции имеют бо́льшую погонную индуктивность при одинаковых радиальных размерах. На рис. 1 и 2 показаны две разновидности таких систем.

В спиральной линии (рис. 1) увеличение погонной индуктивности достигается благодаря замене прямолинейного центрального проводника соленоидом. В некоторых конструкциях такого типа в виде соленоида выполняется наружный цилиндр.

В магнитодиэлектрической линии (рис. 2) для увеличения погонной индуктивности пространство между центральным проводником *5* круглого сечения и наружным металлическим круглым цилиндром *6* заполняется набором металлических шайб *2*, изготовляемых из материала с большой магнитной проницаемостью. Эти шайбы изолированы друг от друга диэлектрическими прокладками *3*, а от внутреннего стержня *5* и наружного цилиндра *6* — диэлектрическими трубками 1 и 4. Подробное исследование распространения электромагнитных волн в магнитодиэлектрической линии и ее свойств как формирующего и задерживающего устройства проведено в работе [4].

Благодаря увеличению погонной индуктивности в коаксиальных системах с периодической структурой снижается скорость распространения электромагнитных волн v и возрастает волновое сопротивление ρ, что важно для создания формирующих и задерживаюших устройств [5, 6].

В работах [2, 4] приведены приближенные соотношения, позволяющие найти погонные параметры рассматриваемых систем. Однако при расчете необходимо также оценить искажения импульсов, в частности определить длительность фронта импульсов на нагрузке. Эта задача решается в настоящей статье.

Исследование искажений передаваемых сигналов осложняется тем, что рассматриваемые коаксиальные системы характеризуются сильной дисперсией, что объясняется, главным образом, наличием продольной емкости $C_{\text{п}}$, а также активных потерь.

В магнитодиэлектрической линии продольная емкость образуется за счет продольного электрического поля между соседними металлическими шайбами *2*, в спиральной линии — между соседними витками соленоида. Так как через эту емкость осуществляется связь между ячейками, то при распространении волны вдоль линии возникновение элек-

тромагнитного поля происходит одновременно в нескольких соседних элементарных ячейках, что вызывает искажение фронта волны и, следовательно, формы передаваемого сигнала. Дисперсия возникает из-за того, что емкостное сопротивление $1/2\pi f C_{\text{п}}$ (f — частота передаваемого сигнала) зависит от частоты.

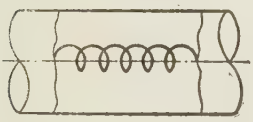


Рис. 1. Спиральная линия

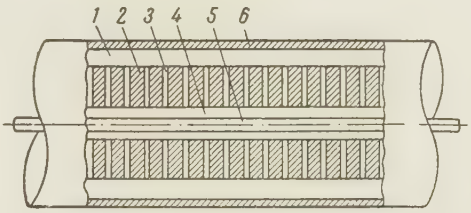


Рис. 2. Магнитодиэлектрическая линия

Влияние активных потерь на изменение фазовой скорости существенно только в области очень высоких частот (для магнитодиэлектрической линии — свыше 100 *Мгц* [4]). Поэтому в области видеочастот можно ограничиться исследованием зависимости искажений только от продольной емкости $C_{\text{п}}$.

1. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Приближенная эквивалентная схема магнитодиэлектрической линии [4] имеет вид, показанный на рис. 3. Здесь L, C и $C_{\text{п}}$ — соответственно погонные индуктивность, емкость и продольная емкость линии; Δx — период структуры (длина элементарной ячейки вдоль оси x распространения волны); u и i — мгновенные значения напряжения и тока в линии.

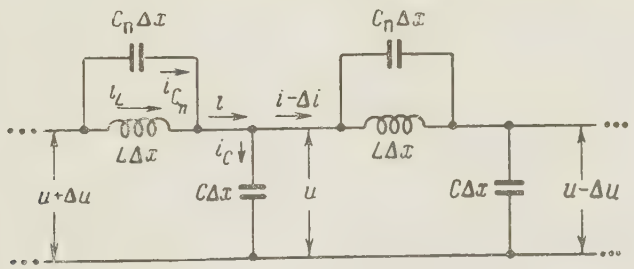


Рис. 3. Эквивалентная схема магнитодиэлектрической линии

В полной эквивалентной схеме необходимо еще учесть индуктивность $L_{\text{д}}$, которая определяется магнитным полем в диэлектрике. Она включается последовательно с контуром ($L\Delta x$, $C_{\text{п}}\Delta x$). Поскольку учет $L_{\text{д}}$ приводит к повышению порядка дифференциальных уравнений и усложнению решения, то в данной работе ее влияние не учитывается. Такое пренебрежение оправдано, так как $L_{\text{д}} \ll L$, ибо магнитная проницаемость металлических шайб $\mu \gg 1$.

Такой же вид имеет и эквивалентная схема спиральной линии. Заметим, что к исследованию подобной схемы сводится ряд задач из теории переходных процессов в обмотках трансформаторов [7].

Уравнения Кирхгофа для цепи, показанной на рис. 3, имеют вид

$$\Delta u = L\Delta x \frac{\partial i_L}{\partial t}, \qquad \Delta i = i_C = C\Delta x \frac{\partial u}{\partial t}. \tag{1}$$

Так как период структуры Δx — всегда достаточно малая величина ($\Delta x \ll \lambda$, где λ — длина волны), то можно полагать, что

$$\Delta u = \frac{\partial u}{\partial x}\Delta x, \qquad \Delta i = \frac{\partial i}{\partial x}\Delta x.$$

Тогда

$$\frac{\partial u}{\partial x} = L\frac{\partial i_L}{\partial i}, \tag{2}$$

$$\frac{\partial i}{\partial x} = C\frac{\partial u}{\partial t}. \tag{3}$$

Ток i_L определяется так:

$$i_L = i - i_{C_\text{п}} = i - C_\text{п}\Delta x\frac{\partial(\Delta u)}{\partial t} = i - C_\text{п}\Delta x^2\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial t}.$$

Подставляя это выражение в уравнение (2), находим

$$\frac{\partial u}{\partial x} = L\frac{\partial i}{\partial t} - \frac{1}{\omega_{\text{гр}}^2}\frac{\partial^3 u}{\partial x\,\partial t^2}, \tag{4}$$

где

$$\omega_{\text{гр}} = \frac{1}{\Delta x\sqrt{LC_\text{п}}} \tag{5}$$

— резонансная частота контура ($L\Delta x$, $C_\text{п}\Delta x$).

Уравнения (3) и (4) суть телеграфные уравнения для схемы, показанной на рис. 3, с продольной емкостью. При $C_\text{п} \to 0$ ($\omega_{\text{гр}} \to \infty$) уравнение (4) приобретает форму, хорошо известную для однородной длинной линии без потерь.

Применим к системе уравнений (3)—(4) преобразование Лапласа

$$\bar{f}(p) = p\int_0^\infty f(t)\,e^{-pt}\,dt.$$

Тогда получим следующую систему уравнений для изображений $\bar{f}(p)$:

$$\frac{\partial\bar{i}(p)}{\partial x} = pC\bar{u}(p), \tag{6}$$

$$\frac{\partial\bar{u}(p)}{\partial x} = pL\bar{i}(p) - \frac{p^2}{\omega_{\text{гр}}^2}\frac{\partial\bar{u}(p)}{\partial x}. \tag{7}$$

Дифференцируя по x обе части уравнения (7) и подставляя значение $\partial\bar{i}(p)/\partial x$ в уравнение (6), находим

$$\frac{\partial^2\bar{u}(p)}{\partial x^2} = \gamma^2(p)\,\bar{u}(p), \tag{8}$$

где

$$\gamma(p) = \frac{p\sqrt{LC}}{\sqrt{1+\dfrac{p^2}{\omega_{\text{гр}}^2}}}.$$

Введем новую переменную

$$q = \frac{p}{\omega_{\text{гр}}}, \tag{9}$$

которой соответствует безразмерное время

$$\tau = \omega_{\text{гр}}t. \tag{10}$$

Тогда

$$\gamma(q) = \frac{\omega_{\text{гр}}\,q\sqrt{LC}}{\sqrt{1+q^2}}.$$

2. ПЕРЕХОДНАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА

Рассмотрим решение уравнения (8) для бесконечно длинной линии, вдоль которой распространяется бегущая волна. Тогда

$$\bar{u}(x, q) = Ae^{-\gamma(q)x}.$$

При $x = 0$ $\bar{u}(0, q) = A$. Чтобы найти переходную характеристику $h(x, \tau)$, предположим, что на входе включается сигнал в виде единичной функции

$$u(0, \tau) = 1(\tau).$$

Тогда

$$A = 1.$$

Значит, изображение переходной характеристики равно

$$K(x, q) = e^{-\gamma(q)x}.$$

Обозначая

$$\alpha = \omega_{\text{гр}} \sqrt{LC}\, x, \tag{11}$$

получим

$$K(\alpha, q) = e^{-\frac{\alpha q}{\sqrt{1+q^2}}}. \tag{12}$$

Чтобы найти оригинал изображения (12), применим преобразование Эфроса [8]

$$F[s(q)] \doteqdot s(q) \int_0^\infty \psi(\tau, \xi)\, \varphi(\alpha, \xi)\, d\xi, \tag{13}$$

где

$$\varphi(\alpha, \xi) \doteqdot F(\alpha, s); \quad \psi(\tau, \xi) \doteqdot e^{-\xi s(q)}. \tag{14}$$

Знак $\doteqdot$ означает соответствие между оригиналом и изображением.

Обозначим

$$s = s(q) = \frac{1+q^2}{q^2}.$$

Тогда

$$K(\alpha, s) = e^{-\frac{\alpha}{\sqrt{s}}}.$$

Полагая, что

$$F(\alpha, s) = \sqrt{s} K(\alpha, s) = \sqrt{s} e^{-\frac{\alpha}{\sqrt{s}}}, \tag{15}$$

получаем на основании формулы Эфроса (13)

$$\sqrt{s}\, K(\alpha, s) \doteqdot s \int_0^\infty \psi(\tau, \xi)\, \varphi(\alpha, \xi)\, d\xi$$

или

$$\frac{K(\alpha, s)}{\sqrt{s}} = \frac{e^{-\frac{\alpha}{\sqrt{s}}}}{\sqrt{s}} \doteqdot \int_0^\infty \psi(\tau, \xi)\, \varphi(\alpha, \xi)\, d\xi.$$

Проинтегрируем по параметру α полученное выражение. Это можно сделать на основании известных теорем операторного исчисления [8]:

$$\int_0^\alpha \frac{e^{-\frac{\alpha}{\sqrt{s}}}}{\sqrt{s}}\, d\alpha \doteqdot \int_0^\alpha \int_0^\infty \psi(\tau, \xi)\, \varphi(\alpha, \xi)\, d\xi d\alpha.$$

Изменяя порядок интегрирования в правой части и учитывая, что от α зависит только функция $\varphi(\alpha, \xi)$, получаем

$$1 - e^{-\frac{\alpha}{\sqrt{s}}} \doteqdot \int_0^\infty \psi(\tau, \xi)\, \varphi_1(\alpha, \xi)\, d\xi, \tag{16}$$

где

$$\varphi_1(\alpha, \xi) = \int_0^\alpha \varphi(\alpha, \xi)\, d\alpha.$$

Из формулы (16) нетрудно получить, что

$$e^{-\frac{\alpha}{\sqrt{s}}} \doteqdot h(\alpha, \tau) = 1 - \int_0^\infty \psi(\tau, \xi)\, \varphi_1(\alpha, \xi)\, d\xi. \tag{17}$$

Функции $\psi(\tau, \xi)$ и $\varphi(\alpha, \xi)$ являются оригиналами изображений, определяемых соотношениями (14) и (15):

$$\psi(\tau, \xi) \doteqdot e^{-\xi s(q)} = e^{-\xi\left(1+\frac{1}{q^2}\right)} = e^{-\xi} e^{-\frac{\xi}{q^2}},$$

$$\varphi(\alpha, \xi) \doteqdot F(\alpha, s) = \sqrt{s}\, e^{-\frac{\alpha}{\sqrt{s}}}.$$

Воспользовавшись справочником [8], находим

$$\varphi(\tau, \xi) = e^{-\xi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (\tau\sqrt{\xi})^{2k}}{\Gamma(k+1)\,\Gamma(2k+1)},$$

$$\varphi(\alpha, \xi) = \int_0^\infty \frac{x}{2\sqrt{\pi\xi^3}}\, e^{-\frac{x^2}{4\xi}} J_0(2\sqrt{\alpha x})\, dx.$$

Тогда

$$\varphi_1(\alpha, \xi) = \frac{1}{2\xi}\sqrt{\frac{\alpha}{\pi\xi}} \int_0^\infty \sqrt{x}\, e^{-\frac{x^2}{4\xi}} J_1(2\sqrt{\alpha x})\, dx.$$

Если ввести переменную $y = \alpha x$, то

$$\varphi_1(\alpha, \xi) = \frac{1}{2\alpha\xi\sqrt{\pi\xi}} \int_0^\infty \sqrt{y}\, e^{-\frac{y^2}{4\alpha^2\xi}} J_1(2\sqrt{y})\, dy.$$

При вычислении переходной характеристики $h(\alpha, \tau)$ удобно ввести новую переменную $z = \sqrt{\xi}$, а также преобразованные функции

$$\Psi(\tau z) = -e^{z^2}\psi(\tau, z) + 1 = -\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k (\tau z)^{2k}}{\Gamma(k+1)\,\Gamma(2k+1)}, \tag{18}$$

$$\Phi(\alpha z) = \frac{2z}{\alpha}\varphi_1(\alpha, z) = \frac{1}{\alpha^2 z^2\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \sqrt{y}\, e^{-\frac{y^2}{4\alpha^2 z^2}} J_1(2\sqrt{y})\, dy. \tag{19}$$

В этом случае формула (17) принимает следующий вид, если учесть, что $d\xi = 2z\,dz$:

$$h(\alpha, \tau) = 1 - \int_0^\infty e^{-z^2} [1 - \Psi(\tau z)]\, \alpha\Phi(\alpha z)\, dz$$

или

$$h(\alpha, \tau) = 1 - \alpha \int_0^\infty e^{-z^2} \Phi(\alpha z)\, dz + \alpha \int_0^\infty e^{-z^2} \Psi(\tau z)\, \Phi(\alpha z)\, dz. \qquad (20)$$

Так как согласно (18) при $\tau = 0$ функция $\Psi(\tau z) = 0$, то первые два члена формулы (20) дают начальное распределение. Обозначая

$$h(\alpha, 0) = 1 - \alpha \int_0^\infty e^{-z^2} \Phi(\alpha z)\, dz, \qquad (21)$$

получаем

$$h(\alpha, \tau) = h(\alpha, 0) + \alpha \int_0^\infty e^{-z^2} \Psi(\tau z)\, \Phi(\alpha z)\, dz. \qquad (22)$$

Эта формула является окончательной и позволяет вычислить переходную характеристику для любых значений α и τ.

Функции $\Psi(\tau z)$ и $\Phi(\alpha z)$ вычисляются по формулам (18) и (19). Удобство введения преобразованных функций состоит в том, что каждая из них зависит только от одной переменной τz или αz. Графики этих функций построены на рис. 4.

Для облегчения вычислений функцию $\Phi(\alpha z)$ можно представить в виде ряда (см. Приложение)

$$\Phi(\alpha z) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m (\alpha z)^m}{\Gamma(m+1)\,\Gamma\left(\frac{m+3}{2}\right)}. \qquad (23)$$

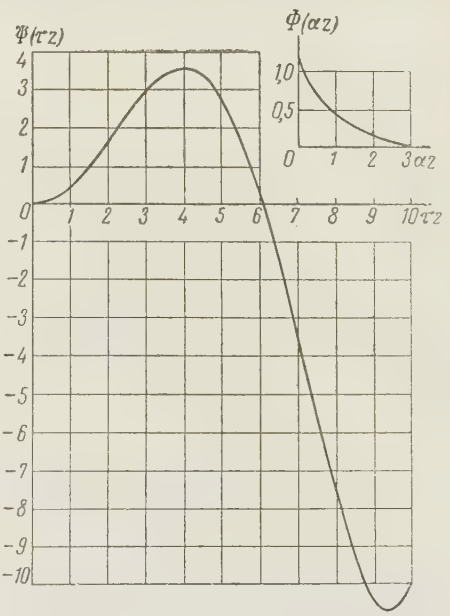


Рис. 4. Графики преобразованных функций

Величину $h(\alpha, 0)$ можно определить из (21) или из (12), полагая $q \to \infty$:

$$h(\alpha, 0) = e^{-\alpha}. \qquad (24)$$

Для того чтобы найти $h(\alpha, \tau)$ при $\tau \to \infty$, полагаем в (12) $q = 0$. Тогда

$$h(\alpha, \infty) = 1. \qquad (25)$$

По полученным формулам была рассчитана переходная характеристика $h(\alpha, \tau)$ для значений параметра $\alpha = 1; 2; 3; 5$ (рис. 5). Построенные графики позволили вычислить активную длительность фронта τ_Φ. Она вычислялась между уровнями $h_1(\alpha)$ и $h_2(\alpha)$, которые определяются соотношениями

$$h_1(\alpha) = h(\alpha, 0) + 0{,}1\,[1 - h(\alpha, 0)], \qquad (26)$$
$$h_2(\alpha) = 1 - 0{,}1\,[1 - h(\alpha, 0)].$$

Для достаточно больших α $h(\alpha, 0) \simeq 0$; значит, величина τ_Φ соответствует промежутку времени, в течение которого переходная характеристика нарастает от $h_1(\alpha) = 0{,}1$ до $h_2(\alpha) = 0{,}9$. Зависимость $\tau_\Phi(\alpha)$ показана на рис. 6.

Формула (24) показывает, что в начальный момент $t = 0$ образуется перепад напряжения в любой точке линии, что соответствует мгновенной

передаче сигнала. Конечно, такой результат противоречит действительной картине распространения электромагнитной волны вдоль линии. Он получился потому, что мы пренебрегли индуктивностью $L_д$ в эквивалентной схеме. Тем не менее приближенное решение позволяет правильно найти скорость распространения, если измерять время задержки на уровне, близком к 0,5 (именно такой уровень обычно принимается на практике).

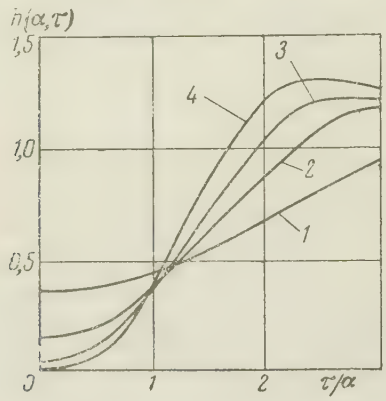


Рис. 5. Переходная характеристика:
1 — $\alpha = 1$; *2* — $\alpha = 2$; *3* — $\alpha = 3$; **4 — $\alpha = 5$**

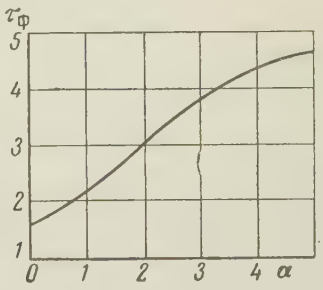


Рис. 6. Зависимость активной длительности фронта от параметра α

Анализ графиков рис. 5 показывает, что при $\alpha \geqslant 2$ кривые $h(\alpha, \tau)$ примерно пересекаются в точке ($\tau/\alpha = 1{,}04$; $h(\alpha, \tau) = 0{,}4$). Значит, если измерять время задержки до момента, когда $h(\alpha, \tau)$ достигает значения 0,4, то

$$\tau_{з_{0,4}} = 1{,}04\,\alpha \simeq \alpha. \tag{27}$$

Таким образом, учет действия емкости $C_п$, приводящий к начальному скачку $h(\alpha, 0)$ в любой точке линии, практически не влияет на величину задержки $\tau_з$. Учитывая (10) и (11), находим действительное время задержки

$$t_з = x_з \sqrt{LC}, \tag{28}$$

где $x_з$ — длина линии задержки. Скорость распространения импульса

$$v = \frac{1}{\sqrt{LC}}. \tag{29}$$

Как показано в работе [4], эта величина скорости соответствует фазовой скорости распространения колебаний с частотой $f \to 0$.

Длительность фронта $\tau_ф$ зависит от параметра α (рис. 6). По мере увеличения x (а значит и α) при распространении волны фронт становится более пологим. Однако при $\alpha \to \infty$ длительность фронта стремится к некоторому предельному значению. При расчетах можно полагать

$$\tau_ф = 5$$

или

$$t_ф = \frac{5}{\omega_{гр}} = \frac{5}{2\pi f_{гр}} = \frac{0{,}8}{f_{гр}}. \tag{30}$$

ПРИЛОЖЕНИЕ

Учитывая, что

$$J_1(2\sqrt{y}) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m y^{\frac{2m+1}{2}}}{\Gamma(m+1)\,\Gamma(m+2)},$$

получаем

$$\Phi(\alpha z) = \frac{1}{\alpha^2 z^2 \sqrt{\pi}} \int_0^\infty e^{-\frac{y^2}{4\alpha^2 z^2}} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m y^{m+1}}{\Gamma(m+1)\,\Gamma(m+2)}\, dy.$$

Так как ряд, определяющий функцию Бесселя, абсолютно сходится, то можно изменить порядок суммирования и интегрирования. Тогда

$$\Phi(\alpha, z) = \frac{1}{\alpha^2 z^2 \sqrt{\pi}} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{\Gamma(m+1)\,\Gamma(m+2)} \int_0^\infty y^{m+1} e^{-\frac{y^2}{4\alpha^2 z^2}}\, dy.$$

Введем переменную

$$x = \frac{y^2}{4\alpha^2 z^2};$$

при этом

$$dx = \frac{y\,dy}{2\alpha^2 z^2}, \qquad dy = \frac{\alpha z}{\sqrt{x}}\, dx.$$

Подставляя значение y и dy, перепишем выражение для $\Phi(\alpha z)$ так:

$$\Phi(\alpha z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m (2\alpha z)^m}{\Gamma(m+1)\,\Gamma(m+2)} \int_0^\infty x^{\frac{m}{2}} e^{-x}\, dx.$$

Как известно [9],

$$\Gamma\left(\frac{m}{2}+1\right) = \int_0^\infty x^{\frac{m}{2}} e^{-x}\, dx.$$

Следовательно,

$$\Phi(\alpha z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m (2\alpha z)^m}{\Gamma(m+1)\,\Gamma(m+2)} \Gamma\left(\frac{m+2}{2}\right).$$

Воспользовавшись основным свойством Г-функции [9]

$$\sqrt{\pi}\,\Gamma(m+2) = 2^{m+1}\Gamma\left(\frac{m+2}{2}\right)\Gamma\left(\frac{m+2}{2}+\frac{1}{2}\right),$$

получаем

$$\Phi(\alpha z) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m (\alpha z)^m}{\Gamma(m+1)\,\Gamma\left(\frac{m+3}{2}\right)}.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Я. С. Ицхоки, Формирование коротких импульсов с помощью магнитодиэлектрической линии, 1947.
2. V. Carley, The Video delay lines of high ρ , Electronics, 1953, 4, 4, 26.
3. H. E. Callman, The cable of high impedance, Proc. I. R. E., 1946, 34, 6.
4. С. И. Виглин, Исследование магнитодиэлектрической линии, Тр. ХВАИВУ, 1958, вып. 106.
5. Я. С. Ицхоки, Импульсные устройства, Изд. Советское радио, 1959.
6. С. И. Виглин, Импульсные устройства, ХВАИВУ, 1960.
7. Л. И. Сиротинский, Перенапряжения и защита от перенапряжений в электрических устройствах, ГЭИ, 1932.
8. В. А. Диткин, П. И. Кузнецов, Справочник по операционному исчислению, ГИТТЛ, 1951.
9. Н. Н. Лебедев, Специальные функции и их приложения, ГИТТЛ, 1953.

Поступила в редакцию
27 X 1960

РАДИОТЕХНИКА И ЭЛЕКТРОНИКА

1961 № 8

СТАТИЧЕСКИЙ РЕЖИМ ПЛОСКОГО МАГНЕТРОНА

А. В. Лазарев, Г. Ф. Филимонов

Строго описан статический режим плоского магнетрона. Получено выражение для распределения плотности электронов в облаке пространственного заряда. Определены значения температуры электронного газа, тангенциального тока и анодного тока магнетрона при $H > H_{кр}$. Теоретические результаты хорошо согласуются с экспериментальными данными.

ВВЕДЕНИЕ

В настоящее время опубликовано большое количество теоретических работ, посвященных изучению статического режима магнетрона. Они отличаются своим подходом к рассмотрению задачи и могут быть распределены на три группы.

В работах первой (см., например, [1, 2]) группы основное упрощающее предположение заключается в том, что скорости электронов на поверхности катода приняты одинаковыми. В этих работах удалось найти аналитические выражения для распределения плотности пространственного заряда электронов, их скоростей и правильно вычислить критическое магнитное поле магнетрона $H_{кр}$. Существенным недостатком работ [1, 2] является предположение об односкоростном режиме на поверхности катода, которое явно не соответствует действительности и не позволяет объяснить ряд существенных моментов статического режима магнетрона (например, существование остаточного анодного тока, текущего через магнетрон при $H > H_{кр}$).

Вторая группа работ связана с найденным Бриллюэном (см. [3]) решением, согласно которому к катоду магнетрона может прилегать электронное облако постоянной плотности, в котором электроны описывают круговые (концентрические с катодом) траектории. Обращенная к аноду граница облака однозначно определяется теорией. Основное возражение против предположения о существовании такого режима в магнетроне сводится к тому, что если источником электронов в магнетроне является нагретый (цилиндрический) катод, то электрон, вылетевший из него с произвольной скоростью и движущийся в статических полях, через определенное время вернется на катод или осядет на анод. Поэтому непонятно, откуда в магнетроне с горячим катодом могут появиться концентрически (с катодом) вращающиеся электроны, образующие облако Бриллюэна. Более того, расчет, произведенный для ряда действующих магнетронов, показал, что радиус границы бриллюэнова облака в них значительно меньше радиуса катода, и режим Бриллюэна в этих приборах вообще не может установиться.

В третьей группе работ (см. [4, 5]) решение рассматриваемой задачи ищется методами максвелловой статистики. В [4] распределение электронов описывается термодинамически равновесной формулой Больцмана, использующей потенциал свободной энергии (см. § 18,2 [6]), а в [5] применяется даже диффузионная теория.

Как известно, длина свободного пробега электронов в магнетроне значительно превышает его размеры. Поэтому соударения электронов

не могут играть сколько-нибудь заметной роли ни в процессе образования облака электронов (статический режим), ни в процессе превращения их энергии в энергию высокочастотного поля (динамический режим), и предпринятая в [4, 5] попытка описания работы магнетрона явно не обоснована. Эксперимент действительно подтверждает, что основные параметры магнетрона (кпд, выходная мощность) не зависят от степени откачки прибора, начиная с вакуума порядка 10^{-6} —10^{-7} *мм* рт. ст.

Осуществленное в [4, 5] согласование теории с экспериментом возможно только путем свободных манипуляций с произвольными параметрами, которыми в [4] является объемная температура электронов, а в [5] — объемная температура электронов и коэффициент диффузии.

В настоящей работе предпринят новый подход к решению задачи о статическом режиме магнетрона. Ниже предполагается, что катод магнетрона эмиттирует электроны с некоторой функцией распределения $F_c(v_0)$ электронов по скоростям, которая отождествляется с функцией распределения термоэлектронов на поверхности катода и принимается равной

$$F_c(v_0) = \frac{2n_0}{\pi v_T^2} e^{-\left(\frac{v_0}{v_T}\right)^2}, \qquad (1)$$

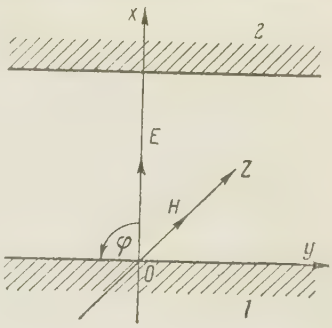


Рис. 1. Схематическое изображение плоского магнетрона:
1 — катод; *2* — анод

где $v_T = \sqrt{2kT_c/m}$; T_c — температура катода; k — постоянная Больцмана; m — масса электрона; n_0 — плотность эмиттированных электронов на поверхности катода; движение электронов в пространстве взаимодействия определяется фокусирующими полями, по сравнению с которыми поле пространственного заряда считается малым.

Эти предположения позволяют рассчитать макроскопические характеристики электронного облака в магнетроне: объемную плотность частиц $N = N(x)$, их ток $\vec{j} = \vec{j}(x)$ и температуру $T = T(x)$ (см. рис. 1).

Проверка полученных результатов производилась на экспериментальном цилиндрическом магнетроне с широким катодом и гладким анодным блоком ($r_c = 1{,}6$ *мм*, $r_a = 2{,}4$ *мм*), в котором фокусирующее электрическое поле отклоняется от постоянного значения на величину $\sim 25\%$. Можно считать, что приведенные ниже для плоских магнетронов теоретические результаты применимы к экспериментальной лампе также с точностью $\sim 25\%$.

1. ОСНОВНЫЕ СООТНОШЕНИЯ

Результатом исследования статистического режима магнетрона должно явиться вычисление интегралов типа

$$I_{j,n} = \int v_j^n F(\vec{v})\, d\vec{v} = \int\limits_{C_T} v_j^n F_c(\vec{v}_0) \left| \frac{\partial(v_x, v_y)}{\partial(v_{0x}, v_{0y})} \right| d\vec{v}_0, \qquad (2)$$

определяющих $N(x)$ $(n = 0)$; $\vec{j}(x)$ $(n = 1)$; T° $(n = 2)$. Для этого нужно из уравнения движения

$$\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \frac{e}{m}\left\{\vec{E}_0 + \frac{1}{c}\left[\frac{d\vec{r}}{dt}, \vec{H}_0\right]\right\} \qquad (3)$$

найти явную зависимость $\vec{v} = \vec{v}(\vec{v}_0, \vec{r}_0)$ и область интегрирования C_T. В (3) $\vec{E}_0$, $\vec{H}_0$ — фокусирующие поля; $\vec{r}$ — радиус-вектор электрона, вы-

летающего из катода с начальной скоростью $\vec{v}_0$; $\vec{v} = d\vec{r}/dt$; e, m — заряд и масса электрона; c — скорость света. Движение электрона считается плоским.

Решение (3) удобно представить в виде

$$\vec{r} = \vec{r}_0 - \gamma \vec{y}_0 t + \frac{\rho}{\omega_H},$$

$$\rho = (\vec{v}_0 + \gamma \vec{y}_0) \sin \omega_H t + [\vec{v}_0 + \gamma \vec{y}_0, \vec{z}_0] (1 - \cos \omega_H t), \qquad (4)$$

где $\omega_H = \frac{eH_0}{mc}$; $\gamma = \frac{E_0}{H_0} c$; $\vec{x}_0$, $\vec{y}_0$, $\vec{z}_0$—единичные векторы. Из (4) следует, что точка наибольшего удаления электрона, имевшего начальную скорость v_0, от катода равна

$$\rho_{x\,\text{экстр}} = \omega_H x_{\text{экстр}} = \frac{\omega_H}{|\omega_H|} |v_0 + \gamma y_0| + v_{0y} + \gamma. \qquad (5)$$

Согласно (1) $F_C(v_0)$ максимально при $v_0 = 0$. Если мы хотим, чтобы электроны с $v_0 = 0$ попали в пространство взаимодействия ($x > 0$) магнетрона и могли бы взаимодействовать с высокочастотным полем, необходимо потребовать

$$\frac{\gamma}{\omega_H} \simeq eE > 0. \qquad (6)$$

Ниже мы будем считать это условие выполненным. Из (4) вытекают также следующие выражения для v_x, v_y:

$$v_x = v_x(\vec{v}_0, \rho_x) = \pm \sqrt{v_{0x}^2 + 2\rho_x \left(v_{0y} + \gamma - \frac{\rho_x}{2}\right)},$$

$$v_y = v_y(\vec{v}_0, \rho_x) = v_{0y} - \rho_x, \qquad (7)$$

где $+|v_x|$ соответствует удаляющимся от катода («взлетающим») электронам, а $-|v_x|$ — электронам, падающим на катод. Формулы (7) позволяют найти следующее выражение для якобиана перехода:

$$\left| \frac{\partial(v_x, v_y)}{\partial(v_{0x}, v_{0y})} \right| = \frac{v_{0x}}{|v_x|}. \qquad (8)$$

Величина ρ_x определяет в (7), (8) координату точки наблюдения и считается фиксированной.

Интегралы (2) являются функциями x. Вклад в их значения дают те электроны, для которых

$$\infty \geqslant x_{\text{экстр}} \geqslant x; \quad x_a \geqslant x_{\text{экстр}} \geqslant x \qquad (9)$$

и которые проходят точку x соответственно при взлете и падении на катод. Раскрывая первое неравенство (9), можно показать, что оно эквивалентно

$$0 \leqslant v_0 \leqslant |\gamma| - \frac{|\rho_x|}{2}, \quad -\frac{\pi}{2} \leqslant \varphi\varepsilon(\omega_H) \leqslant \frac{\pi}{2},$$

$$0 \leqslant |\gamma| - \frac{|\rho_x|}{2} \leqslant v_0 \leqslant \infty, \frac{\pi}{2} \leqslant \varphi\varepsilon(\omega_H) \leqslant \arcsin \frac{\sqrt{v_0^2 + 2\gamma\rho_x} - |\rho_x|}{v_0}, \qquad (10)$$

$$0 \leqslant \frac{|\rho_x|}{2} - |\gamma| \leqslant v_0 \leqslant \infty, \quad -\frac{\pi}{2} \leqslant \varphi\varepsilon(\omega_H) \leqslant \arcsin \frac{\sqrt{v_0^2 + 2\gamma\rho_x} - |\rho_x|}{v_0}.$$

$$\varepsilon(z) = \pm 1; \quad z \gtrless 0.$$

Второе неравенство (9) дает область интегрирования для электронов, падающих на катод. Она оказывается равной $G(x) - G(x_a)$, где $G(x)$ — определенная (10) область изменения v_0.

Теперь интегралы (2) можно записать в следующем виде:

$$I_{j,n} = \left[\int\limits_{G(x)} \frac{1+\varepsilon(v_x)}{2} + \int\limits_{G(x)-G(x_a)} \frac{1+\varepsilon(v_x)}{2} \right] v_j^n F_c(v_0) \frac{v_{0x}}{|v_x|} v_0 dv_0 d\varphi. \quad (11)$$

Если v_j^n не зависит от знака v_x, то (11) принимает более компактный вид:

$$I_{j,n} = \int\limits_{2G(x)-G(x_a)} v_j^n F_c(v_0) \frac{v_{0x}}{|v_x|} v_0 dv_0 d\varphi. \quad (12)$$

2. РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ПЛОТНОСТИ ЭЛЕКТРОНОВ

Полагая в (12) $n = 0$, выполняя интегрирование по φ и интегрируя получившееся после этого выражение по частям, находим следующее выражение для $N(x)$:

$$N(x) = I_{j,0}(x) = \frac{2n_0}{\pi} \int\limits_0^\infty du e^{-(u^2+\Gamma)^2} \frac{2|\gamma| + v_T(u^2+\Gamma)}{2\gamma\rho_x + v_T^2(u^2+\Gamma)^2} - \Delta_a N(x), \quad (13)$$

$$\Gamma = \frac{|\rho_x| - 2|\gamma|}{2v_T}.$$

Член $\Delta_a N(x)$ обусловлен оседанием электронов на аноде и в закритическом режиме ($H > H_{кр}$) на достаточно больших от анода расстояниях, где

$$N(x) \gg N(x_a),$$

его можно опустить.

Рассмотрим относительный порядок величин, входящих в подынтегральное выражение (13). Множитель $\exp[-(u^2+\Gamma)^2]$ достигает своего максимума при $u^2 = (|\Gamma| - \Gamma)/2$ и быстро убывает при отклонении u^2 от этого значения. Полуширина кривой $\exp[-(u^2+\Gamma)^2]$ не превышает единицы. Легко видеть, что в этих пределах входящая под интеграл (13) дробь мепяется на бесконечно малые первого порядка малости. Действительно, величина $|\gamma|$ близка к скорости замедленной волны в магнетроне и имеет порядок $|\gamma| \simeq (10^{-1} - 10^{-2})c$, в то время как v_T, соответствующее $T_c = 1000°K$, равно $v_T = 10^{-3}c$. Поэтому можно ожидать, что формальное разложение стоящей под интегралом (13) дроби в ряд по степеням $u^2 + \frac{|\Gamma| - \Gamma}{2}$ позволит представить интеграл в виде ряда по степеням малого параметра $v_T/2|\gamma|$.

Выполняя это преобразование, находим

$$N(x) = \frac{2n_0}{\pi} \sqrt{2|\rho_x| v_T} \frac{2|\gamma| + v_T \frac{\Gamma + |\Gamma|}{2}}{2\gamma\rho_x + \left(v_T \frac{\Gamma + |\Gamma|}{2}\right)^2} \psi_{1/4}(\Gamma) \times$$

$$\times \left\{ 1 - a(\Gamma) \frac{\psi_{1/4}(\Gamma) - \psi_{3/4}(\Gamma)}{2\psi_{1/4}(\Gamma)} - \frac{b}{4} \left[1 + 2\Gamma^2 \frac{\psi_{1/4}(\Gamma) - \psi_{3/4}(\Gamma)}{\psi_{1/4}(\Gamma)} \right] - \ldots \right\}, \quad (14)$$

$$a = \frac{v_T}{2|\gamma| + \frac{\Gamma + |\Gamma|}{2}} \left(1 - 2v_T \frac{\Gamma + |\Gamma|}{|\rho_x| + 2\gamma} \right),$$

$$b=\frac{v_T^2}{2\gamma\rho_x+\left(v_T\frac{\Gamma+|\Gamma|}{2}\right)^2}\left[1+2v_T\frac{\Gamma+|\Gamma|}{|\rho_x+2\gamma|}\left(1-\frac{4v_T\Gamma}{|\rho_x+2\gamma|}\right)\right],$$

$$\psi_p(\Gamma)=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{|\Gamma|}{2}}e^{-\frac{\Gamma^2}{2}}\left[K_p\left(\frac{\Gamma^2}{2}\right)+\pi\frac{1-\varepsilon(\Gamma)}{\sqrt{2}}I_p\left(\frac{\Gamma^2}{2}\right)\right], \qquad (15)$$

$$\psi_{1,4}(\Gamma)=\int_0^\infty du e^{-(u^2+\Gamma)^2}.$$

Не представляет труда убедиться, что при $\rho_x \gtrsim v_T$ входящие в фигурные скобки (14) члены образуют убывающую последовательность чисел, имеющих относительный порядок $v_T/2\gamma$.

Наглядно представить себе ход кривой $N=N(x)$ можно, подставив в (14) асимптотические выражения бесселевых функций. Тогда, ограничиваясь первым членом ряда (14), в низшем по степеням v_T приближении получаем

$$\frac{N(x)}{2n_0}=\begin{cases}1; & \rho_x=0; \qquad (16а)\\ \dfrac{v_T}{\sqrt{\pi|\rho_x||\rho_x-2\gamma|}}; & v_T\leqslant|\rho_x|\leqslant 2|\gamma|-v_T; \qquad (16б)\\ 0{,}243\sqrt{\dfrac{v_T}{|\gamma|}}; & \rho_x=2|\gamma|; \qquad (16в)\\ \sqrt{\dfrac{2}{\pi}\left|\dfrac{\rho_x}{\rho_x-2\gamma}\right|}\dfrac{v_T}{|\rho_x+2\gamma|}e^{-\Gamma^2}; & 2|\gamma|+v_T<|\rho_x|<|\rho_{xa}|. \qquad (16г)\end{cases}$$

Из формул (16) следует, что по мере удаления от катода плотность электронов падает, достигая наименьшего значения при $\rho_x=\gamma$. На расстоянии $\rho_x=2\gamma$ плотность $N(x)$ имеет относительный максимум, за которым $N(x)$ очень быстро убывает в сторону анода.

Таким образом, граница облака пространственного заряда лежит вблизи значения

$$\rho_x=2|\gamma|. \qquad (17)$$

Если $2|\gamma|>|\rho_{xa}|$, то бóльшая часть вылетевших из катода электронов попадает на анод и в анодной цепи возникает большой ток. Если же $2|\gamma|<|\rho_{xa}|$, то до анода доходит только «хвост» распределения $N(x)$ и ток в анодной цепи мал. Поэтому равенство

$$2|\gamma|=\rho_{xa} \qquad (18)$$

определяет критический режим магнетрона.

Интересно отметить, что формула (16б), определяющая изменение $N(x)$ в середине облака пространственного заряда, пропорциональна $|v_{0x}(0,\rho_x)|^{-1}$ (см. (7)) и совпадает с распределением плотности заряда, поступающего на поверхность катода с нулевой начальной скоростью.

На рис. 2 представлен график $\rho=eN(x)$ для рабочего режима исследовавшейся лампы; n_0 определялось по формуле (см. [7])

$$n_0=N_\chi\sqrt{\frac{kT_c}{2\pi m}}e^{-\frac{e\varphi}{kT_c}}, \qquad (19)$$

где N_χ, φ — плотность электронов в зоне проводимости оксида и работа выхода оксидного катода, которые принимались равными: $N_\chi=4\cdot10^{18}$, $\varphi=1{,}3$ *эв*.

Предпринятая в [8] экспериментальная проверка радиального распределения электронов в магнетроне показала, что в середине рабочего объема магнетрона действительно имеется максимум плотности заряда. Несколько бо́льшая чем на рис. 2 относительная величина его (см. рис. 6в [8]) вполне объясняется тем, что в [8] измерялась плотность лишь тех электронов, энергия которых превышала 20 *эв*.

Формулы (15), (16) позволяют вычислить поле пространственного заряда магнетрона E_q. Считая в простейшем случае $N(x)$ равным значению (16б) при $|\rho_x| < 2|\gamma|$ и нулю при $|\rho_x| > 2|\gamma|$, получаем следующую грубую оценку:

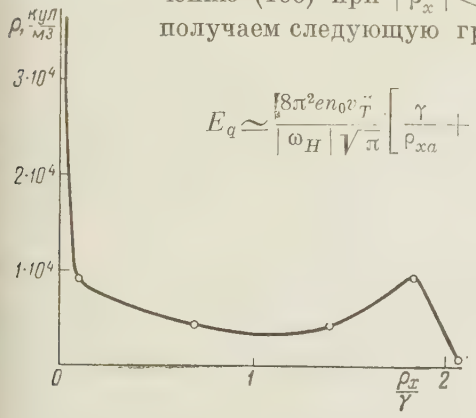


Рис. 2. Распределение плотности пространственного заряда в магнетроне ($\gamma = 3 \cdot 10^8$ *см/сек*, $T_c = 1000°$ C, $r_c = 1{,}6$ *мм*, $r_a = 2{,}4$ *мм*)

$$E_q \simeq \frac{8\pi^2 e n_0 v_T}{|\omega_H|\sqrt{\pi}}\left[\frac{\gamma}{\rho_{xa}} + \frac{1-\varepsilon(\Gamma)}{2}\left(\frac{2}{\pi}\arcsin\sqrt{\frac{\rho_x}{2\gamma}} - 1\right)\right]. \tag{20}$$

Подставляя в (20) численные значения n_0, v_T, γ, ρ_{xa} для случая, представленного на рис. 2, находим, что макс $E_q = 9{,}4 \cdot 10^4$ *в/м* и составляет лишь 10% от фокусирующего поля E_0.

3. ТАНГЕНЦИАЛЬНЫЕ СКОРОСТИ И ТОК

Умножая (12) на e, полагая $v_j^n = v_y$ и преобразуя получившееся выражение так же, как и интеграл для $N(x)$, находим следующее выражение для $j_y(x)$:

$$j_y(x) = -\varepsilon(\omega_H)\frac{4en_0\sqrt{2|\rho_x|}}{\pi v_T^2}\int_0^\infty du\,\frac{\left(\gamma+\frac{\rho_x}{2}\right)^2 - u^4}{[(u^4+v_T\Gamma)^2+2\gamma\rho_x]^{3/2}}\times$$

$$\times\int_{|u^2+v_T\Gamma|}^{\infty} e^{-\frac{v^2}{v_T^2}}\,d\frac{(v^2+2\gamma\rho_x)^{3/2}}{3} - \Delta_a j_y \simeq \varepsilon(\omega_H)\frac{2en_0\sqrt{2|\rho_x|}\,v_T}{\pi}\psi_{1/4}(\Gamma). \tag{21}$$

Второе равенство (21) справедливо при $v_T \lesssim |\rho_x|$ и $N(x) \gg N(x_a)$, когда можно пренебречь влиянием оседания электронов на анод на величину $j_y(x)$.

Разделив второе равенство (21) на (14) в низшем (по степеням v_T) приближении, получаем

$$v_y(x) = -\frac{2\gamma\rho_x - \left(\gamma - \frac{\Gamma+|\Gamma|}{2}\right)^2}{2|\gamma| + v_T\frac{\Gamma+|\Gamma|}{2}}\varepsilon(\omega_H). \tag{22}$$

Из формул (21), (22) видим, что с ростом T_c средний тангенциальный ток возрастает, а средняя тангенциальная скорость остается постоянной и равной $v_y(0, \rho_x)$ (см. (7)) при $\rho_x < 2|\gamma|$.

Следующее приближение дает для $v_y(x)$ поправку

$$\frac{v_y - (v_y)_0}{(v_y)_0} = v_T \frac{2|\rho_x| + v_T(|\Gamma| - \Gamma)}{|\rho_x^2 + 2\gamma\rho_x|} |\Gamma| \frac{\psi_{1/4}(\Gamma) - \psi_{3/4}(\Gamma)}{2\psi_{1/4}(\Gamma)} =$$

$$= \begin{cases} \dfrac{v_T^2}{2|\rho_x^2 - 2\gamma\rho_x|}; & v_T \lesssim |\rho_x| < 2\gamma - v_T; \\ -\dfrac{v_T}{6\gamma}; & \rho_x = 2\gamma; \\ -\dfrac{v_T}{|\rho_x^2 - 4\gamma^2|} & 2\gamma + v_T < |\rho_x| < |\rho_{xa}|, \end{cases} \tag{23}$$

где $(v_y)_0$ обозначает правую часть (22). Подставляя в (23) численные значения, соответствующие $T_c = 800$—$1000°$ С, легко убедиться, что наибольшее изменение скорости, вызванное ростом T_c на 10%, не превышает 1%.

4. АНОДНЫЙ ТОК

Из всех макроскопических величин, характеризующих облако пространственного заряда магнетрона, наиболее легкому экспериментальному наблюдению поддается поток электронов на анод. Вычисляя его при помощи (11) ($v_j^n = v_x > 0$), находим

$$j_x^+(x) = \frac{en_0 v_T}{\pi} \left\{ \sqrt{\pi} \frac{1 - \varepsilon(\Gamma)}{2} + \varepsilon(\Gamma) \int_{|\Gamma|}^{\infty} e^{-v^2} dv + \int_{\sqrt{\Gamma^2 + \frac{2\gamma\rho_x}{v_T^2}}}^{\infty} e^{-v^2 + \frac{2\gamma\rho_x}{v_T^2}} dv \right\}. \tag{24}$$

При $\Gamma \gg 1$ эта формула сильно упрощается, и остаточный ток, текущий на анод магнетрона, в закритическом режиме определяется формулой

$$j_x^+(x_a) \simeq \frac{en_0 v_T}{\pi} \frac{2v_T|\rho_{xa}|}{|\rho_{xa}^2 - 4\gamma^2|} e^{-\Gamma^2}. \tag{25}$$

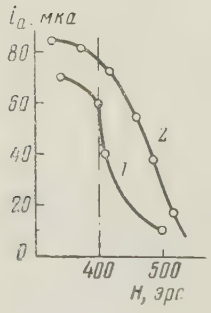


Рис. 3

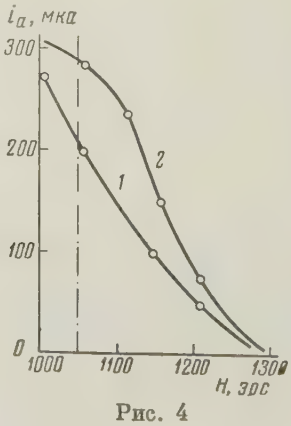


Рис. 4

Рис. 3. Зависимость анодного тока магнетрона i_a от напряженности магнитного поля H при $U_a = \text{const}$:

1 — рассчитана по формуле (24); *2* — построена по экспериментальным данным ($U_a = 100$ *в*, $T_c = 1000°$ С, $r_c = 1{,}6$ *мм*, $r_a = 2{,}4$ *мм*)

Рис. 4. Зависимость анодного тока магнетрона i_a от напряженности магнитного поля H при $U_a = \text{const}$:

1 — рассчитана по формуле (24); *2* — построена по экспериментальным данным ($U_a = 400$ *в*, $T_c = 1000°$ С, $r_c = 1{,}6$ *мм*, $r_a = 2{,}4$ *мм*)

Зависимость анодного тока магнетрона от магнитного поля в режиме, близком к критическому, представлена графиками на рис. 3, 4. Кривые *1* вычислены по формуле (24), кривые *2* построены по экспериментальным данным, полученным на упомянутом макете с гладким анодом. Погрешность эксперимента не превышала $\pm 10\%$, ошибки главным образом были обусловлены неточностью измерения магнитного поля.

Имеет место хорошее совпадение теоретических и экспериментальных данных; некоторое расхождение вызвано, по-видимому, тем, что при вычислениях использовалось приближенное значение N_x.

В области малых токов (порядка единиц микроампер) крутизна теоретической кривой приблизительно в 2 раза превосходит крутизну экспериментальной характеристики. Дополнительными источниками тока являются объемная ионизация остаточных газов и вторичная эмиссия электронов с катода.

5. ТЕМПЕРАТУРА ЭЛЕКТРОНОВ

Как показал эксперимент (см. [8]), температура нейтрального газа в середине рабочего пространства магнетрона весьма высока и значительно превышает T_c. Этот эффект может произойти только вследствие взаимодействия нейтрального газа с потоком электронов и дает некоторое основание предположить, что температура электронов в середине магнетрона также выше T_c. К такому же выводу привели авторов работ [4, 5] предпринятые ими попытки согласования выведенных в [4, 5] кривых для анодного тока с экспериментом. Ввиду того, что соударения электронов не могут играть сколько-нибудь заметную роль в процессе их разогрева, естественно предположить, что увеличение среднего квадратичного разброса скоростей электронов (эквивалентное их «разогреву») является следствием движения их во внешних электромагнитных полях и имеет чисто кинематическое происхождение.

Действительно, вычисляя среднюю кинетическую энергию электронов

$$\frac{\overline{mv^2}}{2} = m\frac{I_{x,2}(x)+I_{y,2}(y)}{2N(x)} \simeq kT_c + \frac{m}{2}\left[2\gamma\rho_x + \left(v_T\frac{\Gamma+|\Gamma|}{2}\right)^2\right] \qquad (26)$$

и пользуясь (22) (второе равенство (26) справедливо при $v_T \lesssim |\rho_x|$, $N(x) \gg N(x_a)$), получаем следующее выражение для температуры электронного газа:

$$T = \frac{2}{3k}\left[\frac{m}{2}(\overline{v^2}-\overline{v}^2) + \frac{kT_c}{2}\right] = T_c + \frac{mv_T|\rho_x|}{3k}\,\frac{|\Gamma|-\Gamma}{2\gamma}. \qquad (27)$$

Формула (27) показывает, что температура электронного газа меняется в направлении анода по квадратичному закону, достигая своего максимума $T_{\text{макс}} = T_c\left(1+\frac{2|\gamma|}{3v_T}\right)$ при $\rho_x = \gamma$. За границей облака пространственного заряда температура электронов совпадает с T_c.

В неподвижной системе координат (см. (26)) средняя кинетическая энергия электрона монотонно растет в направлении анода. Заметим, что именно эта энергия электронов определяет их взаимодействие с нейтральным газом.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В настоящей работе строго описан (без дополнительных предположений и введения произвольных коэффициентов) статический режим плоского магнетрона. Получено выражение для распределения плотности электронов в облаке пространственного заряда, из которого вытекает наличие максимума плотности электронов вблизи границы облака. Теоретическая зависимость анодного тока магнетрона в критическом режиме от магнитного поля хорошо согласуется с экспериментальными

данными и объясняет наличие остаточного тока. Сравнение теоретических и экспериментальных данных позволяет оценить влияние вторичных источников тока (объемной ионизации газа и вторичной эмиссии с катода) на величину анодного тока.

Вычисленные значения температуры электронного газа совпадают по порядку величины с ее качественной оценкой, полученной из шумовых характеристик недовозбужденного магнетрона.

Как показали теоретические и экспериментальные исследования (см., например, [9, 10]), облако пространственного заряда неустойчиво по отношению к высокочастотным колебаниям. Однако интенсивность этих колебаний невелика и напряженность порожденного ими высокочастотного поля не превышает 0,1% от величины статического поля E_0. Поэтому вызванное этими осцилляциями отклонение плотности пространственного заряда от ее среднего значения, представленного формулой (14), также не превосходит 0,1%.

ЛИТЕРАТУРА

1. Г. А. Гринберг, Избранные вопросы математической теории электрических и магнитных явлений, гл. VI, Изд. АН СССР, 1948.
2. С. Я. Брауде, ЖЭТФ, 1935, **5**, 621; 1940, **10**, 217.
3. Теория магнетрона (по Бриллюэну), Сб. переводов с англ., Изд. Советское радио, 1946.
4. Г. Я. Любарский, Л. Э. Пargаманик, Докл. АН СССР, 1952, **34**, 491.
5. Л. Э. Пargаманик, М. Я. Минц, ЖТФ, 1957, **27**, 1301.
6. S. Chapmen, T. Couling, The mathematical theory of nonuniform gases, Cambridge, 1953.
7. Г. Герман, С. Вагенер, Оксидный катод, ГТИ, 1949.
8. H. C. Neddermann, J. Appl. Phys., 1955, **26**, 1420.
9. Б. Б. Кадомцев, ЖТФ, 1959, **29**, 831.
10. В. П. Тычинский, Радиотехника и электроника, 1956, **1**, 2, 233; 1956, **1**, 3, 344.

Поступила в редакцию
4 VII 1960

О ВОЗМОЖНОСТИ СУЩЕСТВОВАНИЯ МЕДЛЕННЫХ ВОЛН В ИЗОТРОПНОМ ПЛАЗМЕННОМ ВОЛНОВОДЕ

Г. А. Постнов

Приведено решение задачи о распространении магнитной волны в плоском плазменном волноводе с диэлектрической вставкой посредине. Показано, что в результате неравномерности плазменного заполнения в таком волноводе могут существовать медленные волны.

В ряде областей электроники СВЧ находят применение медленные волноводные волны, т. е. такие волны, у которых волновое число в волноводе больше волнового числа в свободном пространстве. Они могут создаваться путем заполнения волновода диэлектриком, помещения туда ребристой структуры и т. д. Одним из способов создания замедления волн может служить заполнение волновода анизотропным материалом. Как показано в [1], замедления можно добиться, располагая поперек оси цилиндрического волновода слоистый диэлектрик, в котором чередуются слои толщиной a с проницаемостью ε и толщиной b с проницаемостью единица (в общем случае, ε_1). Поперечное волновое число такого волновода выражается формулой

$$g^2 = \frac{\varepsilon_r}{\varepsilon_z}(k^2\varepsilon_z - h^2), \qquad (1)$$

где

$$\varepsilon_r = \frac{a\varepsilon + b}{a + b}; \quad \varepsilon_z = \frac{(a+b)\varepsilon}{a + b\varepsilon}.$$

Нетрудно видеть, что медленные волны, для которых $g^2 < 0$, могут быть получены, даже если проницаемость диэлектрика меньше единицы. Например, это будет иметь место при $\varepsilon < -b/a$ и $-1 < \varepsilon < 0$.

Другим широко известным способом замедления волн в волноводе является его заполнение гиротропной плазмой. Этот способ требует создания значительных магнитных полей, особенно в диапазоне сантиметровых волн, что делает его использование практически затруднительным. Однако, как следует из предыдущего, по-видимому, для получения медленных волн можно воспользоваться неоднородностью заполнения плазменного волновода в отсутствие магнитного поля. Последняя вызывается спаданием концентрации электронов к стенкам волновода из-за диффузии. Как видно из [2], в плоском волноводе с плазмой хотя и уменьшается фазовая скорость по сравнению с равномерно заполненным волноводом, но медленных волн не образуется. Для получения их следует ввести в волновод еще одну поверхность, изменяющую распределение концентрации электронов и, следовательно, проницаемость заполняющей его плазмы.

Рассмотрим плоский волновод с плазмой (рис. 1). Если мы поместим внутри него равноудаленную от стенок тонкую диэлектрическую пластинку с проницаемостью, близкой к единице, то она не вызовет заметного искажения поля в волноводе, а спад концентрации плазмы в ее

окрестности будет происходить таким же образом, как и около металлической стенки. Аппроксимируя распределение N между двумя поверхностями косинусоидой, запишем для данного случая

$$N = N_0 \left| \sin \frac{\pi y}{2b} \right|, \tag{2}$$

где $2b$ — расстояние между стенками плоского волновода.

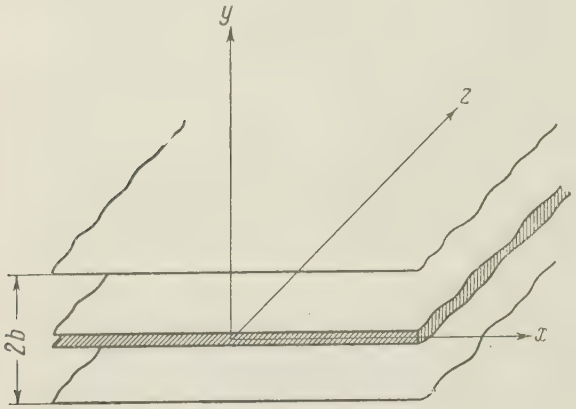


Рис. 1

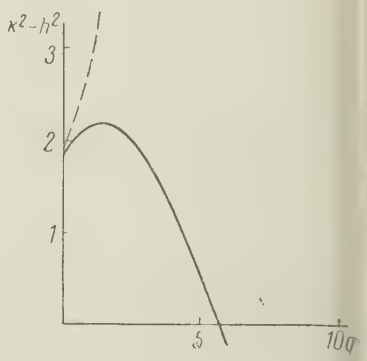


Рис. 2

Рис. 1. Плоский волновод с диэлектрической вставкой

Рис. 2. Зависимость поперечного волнового числа от концентрации плазмы в плоском волноводе с магнитной волной. Сплошная линия — волновод с диэлектрической пластиной, пунктир — волновод без вставки

При таком предположении волновое уравнение для магнитных волн принимает вид

$$\frac{d^2E_x}{dy^2} + \left[k^2 - h^2 - k^2 \frac{4\pi e^2 N_0}{m\omega^2} \left| \sin \frac{\pi y}{2b} \right| \right] E_x = 0 \tag{3}$$

с граничными условиями $E_x|_{y=-b,\,b} = 0$. Оно представляет собой уравнение Хилла с периодом π. Разложим (2) в ряд Фурье на интервале $2b$:

$$\left| \sin \frac{\pi y}{2b} \right| = \frac{2}{\pi} - \frac{4}{3\pi} \cos 2\frac{\pi y}{2b} - \frac{4}{15\pi} \cos 4\frac{\pi y}{2b} - \ldots. \tag{4}$$

Можно видеть, что ряд из коэффициентов Фурье абсолютно сходится. Подставляя (4) в (3) и обозначив $4\pi e^2 N_0/mc^2 = 2q$, перепишем (3) в виде

$$\frac{d^2E_x}{d\zeta^2} + \left[\theta_0 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \theta_{2n} \cos 2n\zeta \right] E_x = 0. \tag{5}$$

Здесь

$$\zeta = \frac{\pi y}{2b}; \quad \theta_0 = \left(\frac{2b}{\pi}\right)^2 \left[k^2 - h^2 - \frac{4q}{\pi} \right]; \quad \theta_{2n} = \frac{4q}{\pi(4n^2-1)}.$$

Общее решение уравнения Хилла на основании теоремы Флоке можно записать в виде

$$E_x = Ae^{\mu\zeta}\Phi(\zeta, \sigma) + Be^{-\mu\zeta}\Phi(\zeta, -\sigma),$$

где σ — некоторый параметр [3]. Функцию Φ также можно представить в виде тригонометрического ряда, причем σ играет роль фазы. Для вы-

полнения граничного условия требуется, чтобы E_x представляло собой четную функцию. Это означает, что $B = 0$. Такое условие выполняется при $\sigma = -\pi/2$. При этом $\mu = 0$, а θ_0 является собственным значением уравнения (5).

Пользуясь приведенными в [3] формулами, запишем

$$\Theta_0 = 1 - \Theta_2 - \frac{1}{8}\Theta_2^2 - \frac{1}{4}\Theta_2\Theta_4 - \frac{1}{16}\Theta_4^2 - \ldots \qquad (6)$$

или, подставляя значения коэффициентов,

$$\left(\frac{2b}{\pi}\right)^2\left[k^2 - h^2 - \frac{4q}{\pi}\right] = 1 - 0{,}4264q - 0{,}0783q^2 - 0{,}0001q^3 - \ldots .$$

Графическая зависимость $(k^2 - h^2)$ от параметра q на волне 3 *см* приведена на рис. 2. Для сравнения там же показана та же зависимость для плоского плазменного волновода без диэлектрика, рассчитанная согласно [2]. Видно, что, начиная со значения $q = 5{,}56$, в волноводе начинают распространяться медленные волны. Это соответствует концентрации $N_0 = 4{,}24 \cdot 10^{12} см^{-3}$.

Данный вывод представляет некоторый интерес, тем более, что из [1] следует, что при заполнении волновода веществом со скачками ε медленные волны могут быть получены лишь электрические, но не магнитные. Кроме того, способ получения медленных волн в плазменном волноводе путем введения лишь одной дополнительной поверхности (вероятно, в круглом волноводе — лишь тонкого коаксиального диэлектрического стержня) вносит сравнительно небольшие потери и в некоторых случаях может оказаться удобнее других способов создания замедляющих структур.

Приношу глубокую благодарность Я. Б. Файнбергу за ценные указания.

ЛИТЕРАТУРА

1. Я. Б. Файнберг, Н. А. Хижняк, ЖТФ, 1955, 25, 4, 711.
2. Г. А. Постнов, Распространение волн в изотропном плазменном волноводе, Радиотехника и электроника, 1960, 5, 10, 1598.
3. Н. Мак-Лахлан, Теория и приложения функций Матье, перев. с англ., ИЛ, 1952.

Поступила в редакцию
22 II 1960

1961 № 8

К ВОПРОСУ О ЧУВСТВИТЕЛЬНОСТИ РАДИОМЕТРОВ

Г. П. Апушкинский

Рассмотрено влияние флуктуаций коэффициента усиления на чувствительность сверхширокополосного нулевого радиометра.

С точки зрения влияния флуктуаций коэффициента усиления на чувствительность радиометра компенсационный, модуляционный и нулевой методы являются тремя последовательными ступенями усовершенствования.

При компенсационном методе [1, 2] флуктуации коэффициента усиления входят с наибольшим «весом», определяемым тем, что высокий уровень собственных шумов приемника проходит через весь тракт усиления.

При модуляционном методе [1, 3] через весь тракт усиления проходит уже только шумовой сигнал, который обычно меньше шумов аппаратуры (в n раз), и, следовательно, влияние флуктуаций усиления на чувствительность будет ослаблено (примерно в n раз). В частности, при расширении полосы предельная чувствительность, связанная с флуктуациями усиления, будет для модуляционного радиометра выше, чем для компенсационного в $n = (T_в + T_а)/\Delta T$ раз [3] (стр. 740). При этом, хотя в тракте до детектора, стоящего перед узкополосным усилителем низкой частоты, проходит полный уровень собственных шумов, все же связанным с ним влиянием флуктуаций усиления при обычных соотношениях коэффициентов усиления и полос до и после детектора можно пренебречь.

При нулевом методе [4, 3] в тракте за детектором (т. е. в усилителе низкой частоты и далее) сигнал отсутствует, и поскольку усиление этой части тракта составляет основное усиление радиометра (обычно несколько миллионов по мощности), вклад флуктуаций усиления в чувствительность снижается до ничтожной величины.

Однако применение ламп бегущей волны в радиометрах [5] и в особенности создание радиометра прямого усиления на лампе бегущей волны [6] позволили увеличить полосу до 10%. Имеются предложения увеличить полосу радиометра до 20% [7], поскольку возникающая при этом проблема помех может быть принципиально решена. В этом случае анализ роли флуктуаций усиления в величине чувствительности нулевого радиометра может представлять интерес. При этом существующий за детектором (перед усилителем низкой частоты) спектр шума, обусловленный входной температурой T (собственные шумы плюс шумы нагрузки) и флуктуациями коэффициента усиления, имеет вид [2] (стр. 433)

$$G_\alpha(\Omega) = 4\overline{\alpha^2}T^2 \frac{\Delta\Omega_\alpha}{\Delta\Omega_\alpha^2 + \frac{\pi^2}{4}\Omega^2}, \qquad (1)$$

где $\Delta\Omega_\alpha$ — эффективная полоса спектра флуктуаций $\alpha(t)$.

Из этого спектра фильтр усилителя низкой частоты «выбирает гармонику» частоты модуляции. После него среднеквадратичное значение флук-

туаций определяется формулой

$$\overline{Y^2} = \int_{\Omega_1}^{\Omega_2} G_\alpha(\Omega)\,\Phi(\Omega)\,d\Omega, \tag{2}$$

где $\Delta\Omega_\alpha$ — характеристика фильтра усилителя низкой частоты с полосой пропускания в интервале $\Omega_1 - \Omega_2$.

В частности, для прямоугольной полосы фильтра получим

$$\overline{Y^2} = \frac{8\,\overline{\alpha^2}T^2}{\pi}\left[\operatorname{arc\,tg}\left(\frac{\pi\Omega}{2\Delta\Omega_\alpha}\right)\right]_{\Omega_1}^{\Omega_2}. \tag{3}$$

Обычно частота модуляции $\Omega_м$ (лежащая между и вблизи Ω_1 и Ω_2) выбирается больше $\Delta\Omega_\alpha$. Учитывая это, получим приближенно

$$\overline{Y^2} = \frac{16\,\overline{\alpha^2}T^2\Delta\Omega_\alpha\Delta\Omega_\Phi}{\pi^2\Omega_м^2}, \tag{4}$$

где $\Delta\Omega_\Phi$ — эффективная полоса пропускания фильтра.

Синхронный детектор, смешивая флуктуации с опорным напряжением частоты $\Omega_м$, «переводит» спектр в область нуля, а следующее за ним интегрирующее устройство обычно имеет значительно более узкую полосу $\Delta\Omega$, чем полоса фильтра усилителя низкой частоты $\Delta\Omega_\Phi$, так что «фильтрация» определяется $\Delta\Omega$, и окончательно имеем

$$\overline{Y^2} = \frac{16\,\overline{\alpha^2}T^2\Delta\Omega_\alpha\Delta\Omega}{\pi^2\Omega_м^2}. \tag{5}$$

Далее, определяя чувствительность радиометра обычным образом [2], получим вместо известного выражения для чувствительности нулевого радиометра [3]

$$\delta T = \pi T\left(\frac{\Delta\Omega}{\Delta\omega}\right)^{1/2} \tag{6}$$

где $\Delta\omega$ — полоса радиометра, а влияние флуктуации усиления никак не учтено) новое выражение

$$\delta T = \pi T\left[\frac{\Delta\Omega}{\Delta\omega} + \frac{16\,\overline{\alpha^2}\Delta\Omega_\alpha\Delta\Omega}{\pi^2\Omega_м^2}\right]^{1/2}. \tag{7}$$

При расширении полосы радиометра $\Delta\omega$ и недостаточной стабильности источников питания лампы бегущей волны оба слагаемых в скобках могут стать одного порядка.

Следует выбирать частоту модуляции $\Omega_м$ по возможности выше и не стремиться повышать частоту питания стабилизаторов лампы бегущей волны. Хотя повышение частоты уменьшает вес и габариты аппаратуры, но при этом растет эффективная полоса спектра флуктуаций $\Delta\Omega_\alpha$.

Рекомендации, даваемые формулой (7), могут представлять интерес и для радиометра с мазером бегущей волны, когда полоса $\Delta\omega$ не столь велика, как у радиометра с лампой бегущей волны, но зато флуктуации усиления (т. е. $\overline{\alpha^2}$) могут быть значительно больше.

ЛИТЕРАТУРА

. В. С. Троицкий, ЖТФ, 1951, 21, 8, 994.
. Ф. В. Бункин, Н. В. Карлов, ЖТФ, 1955, 25, 3, 430.
. Ф. В. Бункин, Н. В. Карлов, ЖТФ, 1955, 25, 3, 733.
. В. С. Троицкий, ЖТФ, 1955, 25, 3, 478.
. Г. П. Апушкинский, Радиотехника и электроника, 1958, 3, 6, 852.
. F. D. Drake, H. I. Ewen, Proc. I. R. E., 1958, 46, 1, 53.
. Н. А. Большаков, Ю. Н. Парийский, Изв. ГАО, 1960, 21, 5, в. 164, 162.

Поступила в редакцию
22 XII 1960

ИССЛЕДОВАНИЕ КАНАЛЬНЫХ ТРИОДОВ

З. С. Грибников, В. И. Компан, Л. В. Святогор

Описано получение диффузионных канальных триодов из германия. Исследованы статические параметры и характеристики таких триодов в различных режимах работы. Рассмотрен фототриодный режим и определена фоточувствительность триодов, достигающая 100 *а/лм*.

ВВЕДЕНИЕ

Канальные или полевые триоды были предложены Шокли [1] и впервые исследованы Дейси и Россом [2, 3]. Они обладают высокой предельной частотой усиления и большим входным сопротивлением, а также могут работать как высокочувствительные фототриоды. Поэтому поиски эффективных методов их получения и исследование свойств являются актуальной задачей.

1. ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ

1. Однородный канал в приближении плавного изменения потенциала

Будем называть канал однородным, если: а) электрическое поле в канале зависит от одной координаты; б) канал характеризуется единственной величиной напряжения отсечки (V_0), при котором обедненный носителями тока слой распространяется на все сечение канала. В приближении плавного изменения потенциала вдоль канала, рамки применимости которого установлены в работе [1], вольтамперная характеристика подобных каналов дается формулой

$$i = [f(\varphi_c) - f(\varphi_и)], \tag{1}$$

где $\varphi = V/V_0$; V — напряжение между какой-либо точкой канала и затвором; φ_c и $\varphi_и$ — значения φ, относящиеся соответственно к стоку и истоку канала *; $i = I/I_0$; $I_0 = G_0V_0$, причем G_0 — проводимость канала при $\varphi_и = 0$, $\varphi_c \to 0$, $f(\varphi)$ — так называемая «функция канала», вид которой зависит от геометрии и других свойств затвора и канала.

Для плоскопараллельного одномерного канала с крутым p — n-переходом и сильно легированным затвором (например, с p^+ — n-переходом см. [1])

$$f(\varphi) = \varphi\left(1 - \frac{2}{3}\varphi^{1/2}\right); \tag{2}$$

для плоскопараллельного одномерного канала с p — n-переходом, образованным линейным изменением концентрации примесей (см. [4]),

$$f(\varphi) = \varphi\left(1 - \frac{3}{5}\varphi^{2/3}\right). \tag{3}$$

Формулы (2) и (3) справедливы для $0 \leqslant \varphi \leqslant 1$.

При $\varphi_c = 1$ наступает отсечка канала. При этом поле в канале у стока делается бесконечно большим. Дальнейший рост φ_c не меняет распреде-

* Здесь принята та же терминология, что и в русском переводе работ [1,2]; для каналов с электронной проводимостью сток — анод, источник — катод, затвор — сетка.

ления потенциала в канале, исключая небольшой участок вблизи стока. Это позволяет считать при $\varphi > 1$ $f(\varphi) = f(1)$.

Учитывая, что при $\varphi \geqslant \varphi_в = V_в/V_0$ наступает лавинный пробой p — n-перехода, а при $\varphi < 0$ наблюдается инъекция, можно представить функцию канала $f(\varphi)$ в том виде, как она изображена на графике рис. 1, и

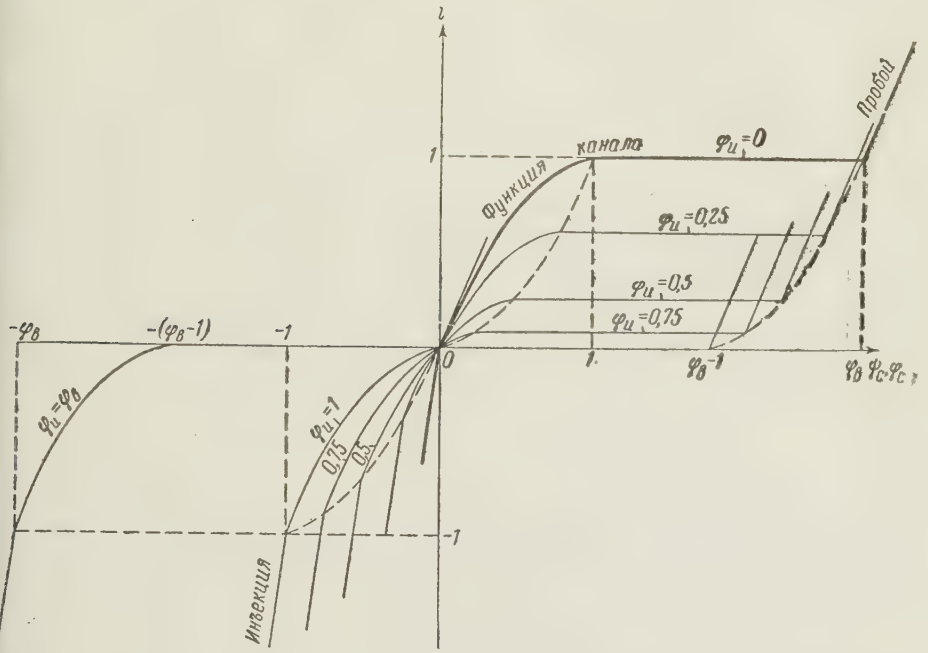


Рис. 1. Семейство характеристик $i = F(\psi_с)$ при различных $\varphi_и$, построенное с помощью функции канала $f(\varphi)$ (утолщенная кривая); $\psi_с = \varphi_с - \varphi_и$

пользоваться формулой (1) при любых $\varphi_с$ и $\varphi_и$. Взяв график $f(\varphi)$ в качестве шаблона, можно построить семейство характеристик $i = F(\varphi_с - \varphi_и)$ при $\varphi_и = \text{const}$ для любых $\varphi_с$ и $\varphi_и$ (что выполнено на рис. 1).

Основной статический параметр полевого триода — крутизна — вводится как

$$G = \left(\frac{\partial I}{\partial V_и}\right)_{(V_с - V_и) = \text{const}} \tag{4}$$

В режиме отсечки она равна

$$G = G_0 \left[\frac{df(\varphi_и)}{d\varphi_и}\right]. \tag{4'}$$

При $\varphi_и = 0$ $df(\varphi_и)/d\varphi_и = 1$ и $G = G_0$.

2. Учет конечности предельной скорости дрейфа носителей тока в электрическом поле

Критерий отсечки $E = \infty$ верен при условии неограниченного роста скорости дрейфа носителей тока с возрастанием электрического поля. На самом деле [6] при полях свыше 10^3 *в/см* в германии и кремнии этот рост сильно замедляется и наступает квазинасыщение, при котором но-

сители тока достигают предельной скорости дрейфа (для электронов в германии она равна $v_{пред} = 5{,}4 \cdot 10^6$ *см/сек*). Предположив для простоты, что скорость дрейфа носителей прямо пропорциональна напряженности поля $v_д = u_0 E$, где u_0 — подвижность носителей в слабых полях, ока $v_д \leqslant v_{пред}$, а затем не зависит от поля, вводим критерий насыщения в виде

$$E = E_к = \frac{v_{пред}}{u_0}. \qquad (5)$$

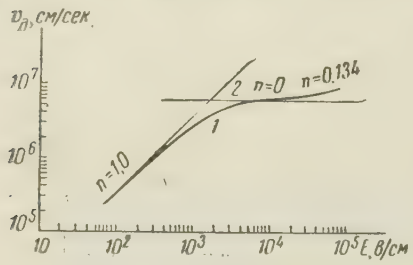


Рис. 2. Зависимость скорости дрейфа электронов в германии от напряженности электрического поля:

1 — экспериментальная зависимость при 300° К [6]; *2* — зависимость, принятая для расчетов

На рис. 2 представлена зависимость $v_д = f(E)$ для электронов в германии, взятая из работы [6], в сравнении с упрощенной зависимостью, принятой для расчета. В этом случае $E_к = 1400$ *в/см*.

Ток и напряжение насыщения $I_н$, $V_н$ канального триода при использовании критерия (5) находятся путем решения системы

$$\varphi_к \frac{df}{d\varphi}\Big|_{\varphi=\varphi_н} = i_н \quad (6а); \quad i_н = f(\varphi_н) - f(\varphi_и), \qquad (6б)$$

где $i_н = I_н/I_0$; $\varphi_н = V_н/V_0$; $\varphi_к = E_к l/V_0$. (уравнение (6б) — переписанное в новых обозначениях уравнение (1), а уравнение (6а) непосредственно вытекает из условия (5)). Из системы (6а), (6б) для $\varphi_н$ получается

$$\varphi_к(1 - \varphi_н^m) = \varphi_н\left(1 - \frac{\varphi_н^m}{m+1}\right) - \varphi_и\left(1 - \frac{\varphi_и^m}{m+1}\right), \qquad (7)$$

где $m = 1/2$ для $f(\varphi)$, даваемой формулой (2), и $m = 2/3$ для $f(\varphi)$, даваемой формулой (3).

На рис. 3 построена зависимость напряжения на канале при насыщении $\varphi_н - \varphi_и$ от $\varphi_к$ при различных $\varphi_и$ (для $m = 1/2$). В отличие от предельного случая $\varphi_к = \infty$, когда для любых $\varphi_и$ $\varphi_н = 1$, при конечных $\varphi_к$ $\varphi_н$ зависит от $\varphi_и$. Поэтому при $\varphi_к < 10$ построение семейства характеристик по шаблону (рис. 1) уже не будет законным. Ток насыщения $I_н$ при $\varphi_и = 0$ становится меньше I_0, а средняя крутизна — меньше $\frac{m}{m+1} G_0$. На рис. 4 представлена зависимость $i_н$ (при $\varphi_и = 0$) от $\varphi_к$ $(m = 1/2)$.

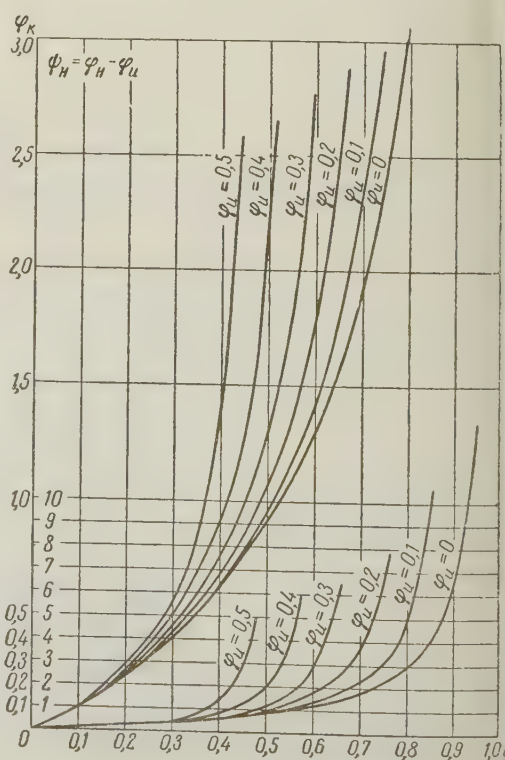


Рис. 3. Зависимость $\psi_н = \varphi_н - \varphi_и$ от $\varphi_к$ при различных $\varphi_и$ для каналов с крутым $p-n$-переходом затвора

Крутизна триода, введенная формулой (4), может быть получена в виде

$$G = \left(m\varphi_к \varphi_н^{m-1} \frac{1-\varphi_и^m}{1-\varphi_н^m + m\varphi_к\varphi_н^{m-1}} \right) G_0. \qquad (8)$$

При $\varphi_к \to \infty$ формула (8) дает тот же результат, что и (4′) — $G = G_0(1-\varphi_и^m)$. При $\varphi_к \to 0$ $\varphi_и \to \varphi_к$ и $G = m\varphi_к^m G_0(1-\varphi_и^m)$.

Сформулируем выводы:

1) В длинных каналах ($\varphi_к \geqslant 1{,}5$—2) максимальный ток и средняя крутизна обратно пропорциональны длине канала $\left(I_н = \frac{mV_0}{m+1} G_0\right)$. Дальнейшее уменьшение длины канала приводит к замедленному росту $I_н$, который при $\varphi_к \to 0$ насыщается к значению

$$I_н = G_0 E_к l = g_0 E_к, \qquad (9)$$

где g_0 — проводимость канала длиной в 1 *см*.

2) Напряжение насыщения при $\varphi_и = 0$ в длинных каналах равно V_0. С сокращением длины канала $V_н < V_0$ (например, при $m = 1/2$ и $\varphi_к = 1$ $V_н = \frac{1}{2} V_0$). При $\varphi_к \to 0 \to 0$ $V_н = E_к l$.

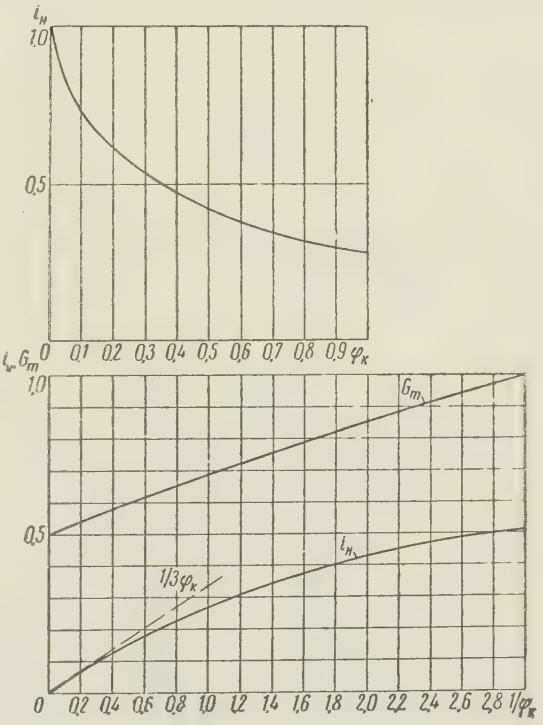


Рис. 4. Зависимость $i_н$ и G_m от $\varphi_к$ при $\varphi_и = 0$ для каналов с круглым $p-n$-переходом затвора ($i_н = 1 - \sqrt{\varphi_н}$; $G_{ср} = i_н$; $G_m = 1/2\sqrt{\varphi_н}$)

3) Мощность, выделяющаяся в канале при напряжении насыщения, медленно падает с уменьшением длины канала.

4) При $\varphi_и \neq 0$ $V_н$ зависит от $V_и$, возрастая к V_0 при $V_и \to V_0$.

3. Влияние малой неоднородности

Экспериментально трудно осуществить совершенно однородные каналы. Малую неоднородность можно учесть в теории плавного изменения потенциала в канале.

Предположим, что напряжение отсечки и проводимость канала меняются вдоль канала так, что

$$\frac{df}{d\varphi} = 1 - \varphi^m + \gamma x \qquad (10)$$

для случая крутого $p-n$-перехода затвора это соответствует изменению ширины канала по закону $a(x) = a_0(1+\gamma x)$). Нормирующее на-

пряжение V_0 в формуле (10) отнесено к точке $x = 0$. Тогда вольтамперная характеристика получается интегрированием уравнения

$$I = g_0 V_0 (1 - \varphi^m + \gamma x) \frac{d\varphi}{dx} \tag{11}$$

(g_0, как и V_0, отнесено к точке $x = 0$) и имеет вид

$$i = \int_{\varphi_и}^{\varphi_с} (1 - \varphi^m) \exp\left[\frac{\gamma l}{i} (\varphi - \varphi_и)\right] d\varphi, \tag{12}$$

где, как и раньше, $i = I/I_0$, причем $I_0 = g_0 V_0 / l$.

При малой неоднородности из (12) получается

$$i = f(\varphi_с) - f(\varphi_и) + \gamma l \left[\frac{f_1(\varphi_с) - f_1(\varphi_и)}{f(\varphi_с) - f(\varphi_и)} - \varphi_и\right], \tag{13}$$

где $f_1(\varphi) = \frac{\varphi^2}{2}\left(1 - \frac{2}{m+2}\varphi^m\right)$. Таким образом, появляется асимметрия, и построение семейства характеристик по шаблону вновь невозможно.

2. ИЗГОТОВЛЕНИЕ ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫХ ОБРАЗЦОВ

В качестве экспериментальных образцов использовались торцовые диффузионные канальные триоды. Изготовление униполярных триодов на основе диффузионного p — n-перехода описано в работах [4, 5].

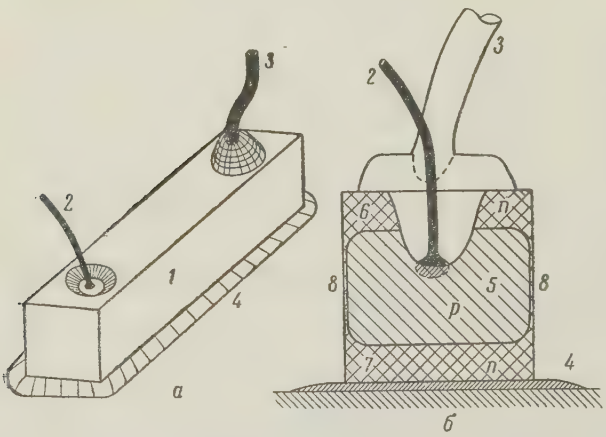


Рис. 5. Экспериментальные образцы триодов (*а*—общий вид; *б* — поперечное сечение):

1 — пластинка германия; *2* — вывод *p*-области затвора; *3* — вывод источника; *4* — держатель, вывод стока; *5* — область затвора; *6* — область источника; *7* — область стока; *8* — область канала

однако предложенные в них методы требуют для получения каналов достаточно большого периметра очень высокой точности механической обработки. Добиться достаточной точности, по-видимому, не удается, и ток канала получается гораздо меньше расчетного (см. [5]). Поэтому, для получения образцов с высокой крутизной мы применили методику, в которой диффузия примеси и травление происходят от одной и той же поверхности, вследствие чего отпадает необходимость высокой точности механической обработки.

Экспериментальные образцы схематически показаны на рис. 5.

3. ИССЛЕДОВАНИЕ ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫХ ОБРАЗЦОВ

Экспериментальные образцы обладали каналами длиной $l \simeq 0{,}025$ *см*, протяженность фронта канала (периметр) составляла $d \simeq 1$ *см*. Проводимость канала лежала в пределах $G_0 \simeq 0{,}002 - 0{,}005$ *мо*; напряжение отсечки V_0 равнялось 15—40 *в*. По этим данным можно рассчитать ток насыщения I_0, толщину канала a и градиент концентрации примеси в поперечном сечении канала $\mathfrak{G}$, принимая гипотезу о линейном законе изменения ее [4]:

$$I_0 = \frac{2}{5} G_0 V_0, \tag{14}$$

$$a = \frac{3\varepsilon u_n d}{16\pi l} \frac{V_0}{G_0}, \tag{15}$$

$$\mathfrak{G} = \frac{2lG_0}{qu_n da^2}. \tag{16}$$

Получается $a \simeq 6 - 10$ *мк*, $\simeq 10^{19}$ *см*$^{-4}$. Приближенное значение $\mathfrak{G}$ можно получить из расчета диффузионного процесса, измеряя глубину залегания $p - n$-перехода:

$$\mathfrak{G} = \frac{F(C_0, \mathfrak{N}_p)}{x_{pn}^4}, \tag{17}$$

где $F(C_0, \mathfrak{N}_p)$ — функция концентрации основной примеси в материнском материале $\mathfrak{N}_p$ и концентрации диффундируемой примеси у поверхности C_0. Полученное из (17) значение $\mathfrak{G}$ также равно $\sim 10^{19}$ *см*$^{-4}$.

1. Электрические характеристики и параметры

Измерению статических характеристик и параметров сильно препятствовали термические эффекты в триодах. Несмотря на то, что конструкция триодов обеспечивала хороший теплоотвод (образцам была придана конструкция серийных триодов П8, причем кристаллы припаивались по всей плоскости стока к кристаллодержателю), это не обеспечивало достаточного постоянства температуры при измерениях вследствие сильной локализации выделения тепла в канальных триодах. Так, в режиме, когда мощность $P_c = U_c I_c$ равнялась 300 *мвт*, ток насыщения затвора возрастал за 20 *мин* вдвое, а при $P_c = 500$ *мвт* — вчетверо (оставаясь после этого неизменным и возвращаясь к прежнему значению при охлаждении образца); $U_c = V_c - V_и$.

Тепловые эффекты приводили к 1) появлению отрицательной проводимости затвора при достаточно высоких напряжениях на стоке; 2) уменьшению значений напряжения насыщения и тока насыщения; 3) появлению иногда отрицательной проводимости сток — источник в режиме насыщения.

Первый эффект объясняется увеличением термической генерации неосновных носителей при малых напряжениях затвора, когда на стоке выделяется наибольшая мощность. Два других эффекта связаны с уменьшением подвижности носителей тока при разогреве. Поэтому при всех измерениях применялось интенсивное воздушное охлаждение образцов, в значительной мере устранявшее разогрев. Термические эффекты при этом подавлялись.

Поскольку для наших образцов $\varphi_к$ составляло 1—2, должен был быть заметен эффект ограничения дрейфовой скорости. На рис. 6 построена расчетная характеристика (формула (3)) для одного из образцов и нанесены экспериментальные точки, причем начало координат для каждого напряжения между затвором и источником сдвигалось на величину этого напряжения вдоль расчетной кривой. Как видно, совпадение очень хоро-

шее, кроме сильнотоковых точек при $V_и = 0$, где должно проявляться ограничение скорости дрейфа.

Таблица 1

№ образца	Максимальный ток I_m, ма	Максимальная крутизна G_m, ма/в	Начальная проводимость G_0, ма/в	№ образца	Максимальный ток I_m, ма	Максимальная крутизна G_m, ма/в	Начальная проводимость G_0, ма/в
593	20	3,2	4,2	503	20	4,0	4,75
5..5	30	2,4	4,5	311	42	6,4	6,7
808	20	1,8	2,45	545	40	6,4	—
				834	5,2	1,3	1,3

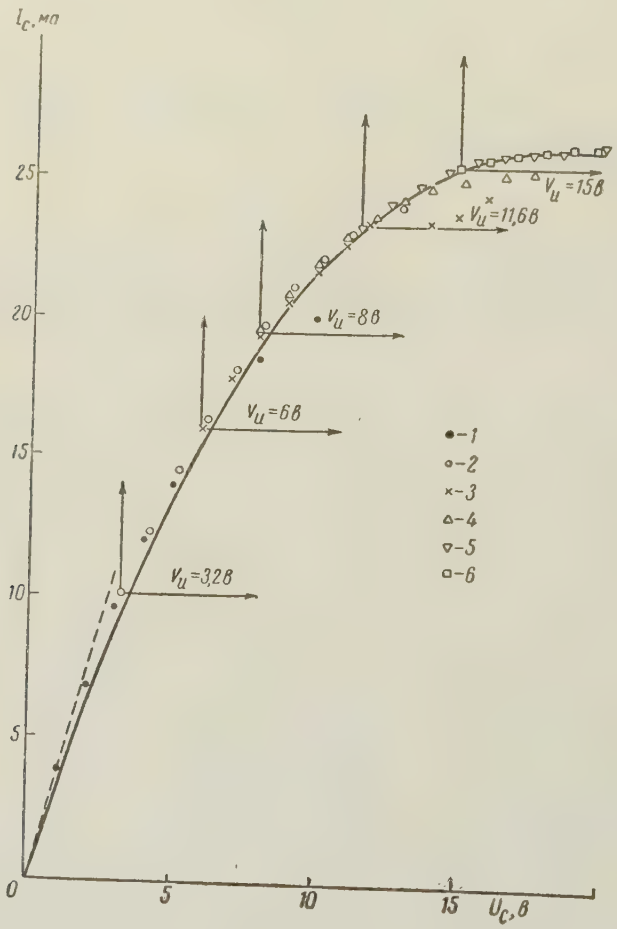


Рис. 6. Расчетная функция канала ($V_0 = 18$ в, $I_0 = 65$ ма) и экспериментальные точки, отложенные в смещающихся координатах I_c, U_c (величина смещения равна $V_и$):

1 — $V_и = 0$; 2 — $V_и = 3{,}2$ в; 3 — $V_и = 6$ в; 4 — $V_и = 8$ в; 5 — $V_и = 11{,}6$ в; 6 — $V_и = 15$ в

Максимальная крутизна G_m по этой причине была всегда меньше проводимости. В табл. 1 сравнены значения G_m и G_0 для нескольких образцов.

Асимметрия характеристик при перемене местами источника и стока наблюдалась для большинства образцов. На рис. 7 оказано семейство характеристик для случая сильной асимметрии (образец № 365). Точки, в которых начинается инъекция при $U_c > 0$, хорошо ожатся на вольтамперную характеристику $I_c = f(U_c)$ при $V_и = 0$, сли поменять местами источник и сток. Асимметрия характеристик, по-идимому, объясняется неоднородностью канала (см. § 2).

Пробивное напряжение при различных напряжениях источника хорошо подчинялось закону

$$(V_c)_в = (U_c + V_и)_в = V_в = \text{const}. \qquad (18)$$

то видно на рис. 7 (для обоих полусемейств), а также рис. 8, на котором показаны зависимости $I_c = f(V_и)$ при различных U_c.

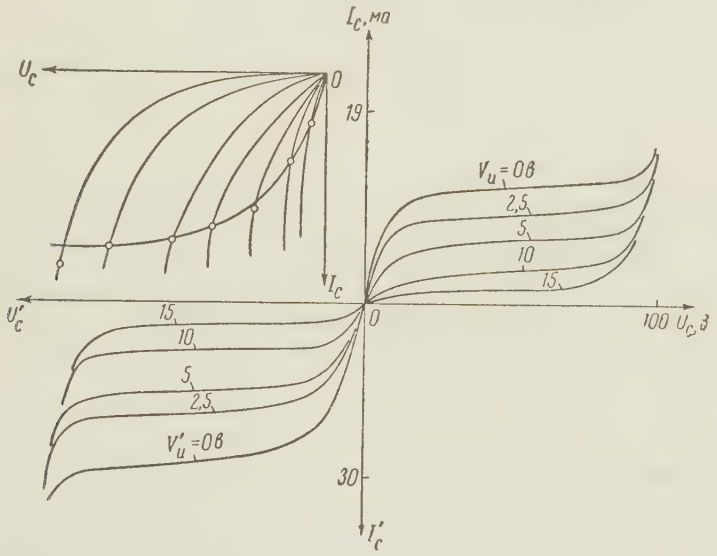


Рис. 7. Вольтамперные характеристики $I_c = f(U_c)$ для «прямого» и «обратного» включения триода:

а — нормальное семейство; *б* — семейство характеристик при перемене местами источника и стока; *в* — нормальное семейство при $U_c < 0$

Внутреннее сопротивление образцов (дифференциальное сопротивление стока) для триодов с максимальным током 20—30 *ма* лежало в пределах 10—100 *ком*, достигая пологого максимума посредине между напряжением насыщения и пробивным напряжением.

Входные токи для большинства образцов лежали в пределах 10—30 *мка*. Входное дифференциальное сопротивление при достаточном отводе тепла от образцов было положительным, величина его лежала для хороших образцов в пределах 1—10 *Мом*.

Кратность запирания, т. е. отношение тока насыщения стока при $V_и = 0$ к минимальному току стока (см. рис. 8), для удовлетворительных образцов превышала 100.

Емкость, вносимая триодом в «анодный» контур при смещении стока 10—15 *в*, составляла 20—40 *пф*.

Предварительные измерения показали, что триоды могли усиливать на частотах порядка десятков мегагерц, причем в резонансных схемах подстройку контуров можно было производить при помощи напряжений на стоке и затворе.

2. Фототриодные свойства образцов

Возможность использования униполярных канальных триодов в качестве фототриодов рассмотрена в работе [5]. Она основана на высокой чувствительности, которую можно получить у германиевого и кремниевого

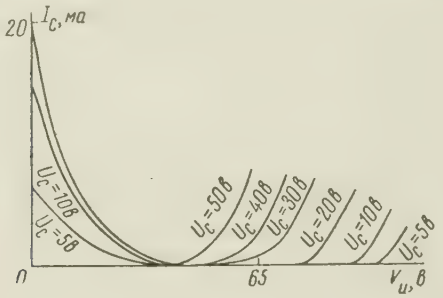


Рис. 8. Вольтамперные характеристики $I_с = f(V_и)$ при различных $U_с$

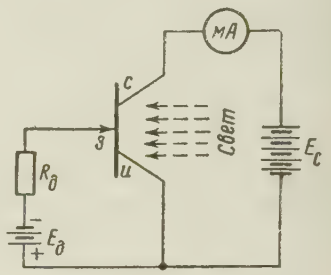


Рис. 9. Схема фототриодного включения полевого триода

фотодиодов. В случае канального триода p — n-переход, отделяющий затвор от стока, канала и источника, может быть использован в качестве фотодиода, причем напряжение, создаваемое им на нагрузке в цепи затвора, будет управлять током стока (см. рис. 9). По-видимому, чувствительность такого фототриода равна (при $R_д \ll R_i$, где R_i — дифференциальное сопротивление затвора)

$$M_т = M_д R_д G, \qquad (19)$$

где $M_д$ — чувствительность затвора как фотодиода. При $R_д \gg R_i$

$$M = M_д R_i G \qquad (20)$$

Взяв $M_д \simeq 20$ *ма/лм*, $R_i \simeq 10$ *Мом*, $G \simeq 3$ *ма/в*, имеем $M_т = 600$ *а/лм*.

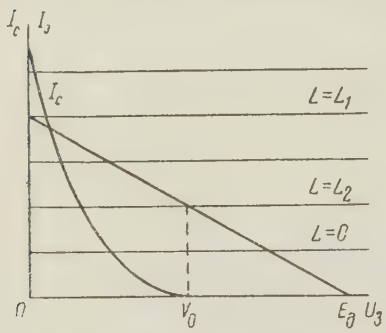


Рис. 10. К расчету фоточувствительности триода:
вольтамперная характеристика $I_с = f(V_и)$ триода в режиме насыщения и характеристики затвора как фотодиода

Зависимость тока стока от уровня освещенности, а также от выбора величин $R_д$ и $E_д$ легко может быть уяснена, если использовать фотодиодные характеристики затвора и стоково-затворную характеристику триода (см. рис. 10). Обозначим через L световой поток в люменах, падающий на светочувствительную поверхность триода, через $I_т$ и $I_ф$ — соответственно темновой и полный токи затвора. Тогда при

$$I_ф = I_т + M_д L \geqslant \frac{E_д}{R_д}$$

напряжение на затворе не превышает нескольких сотен милливольт ($U_д = V_и \simeq 0$), и ток канала близок к максимальному — $I_{со}$. При

$$I_ф = I_т + M_д L \leqslant \frac{E_д - U_{д\,зап}}{R_д}$$

напряжение на затворе $U_д$ превышает напряжение запирания $U_{д\,зап}$, и ток канала близок к нулю. При световых потоках $L_1 \geqslant L \geqslant L_2$, где

$$L_1 = \left(\frac{E_д}{R_д} - I_т\right)\frac{1}{M_д}, \quad L_2 = \left(\frac{E_д - U_{д\,зап}}{R_д} - I_т\right)\frac{1}{M_д}, \qquad (21)$$

ток стока регулируется падающим светом. Это иллюстрируется рис. 11, на котором представлены экспериментальные зависимости $I_c = f(L)$ при нескольких значениях $E_д$. Меняя величину $E_д$, можно получать интервалы чувствительности фототриода вблизи любых значений освещенности, причем ширина интервала (и, следовательно, чувствительность в нем) определяется величиной $R_д$ (пока $R_д < R_i$).

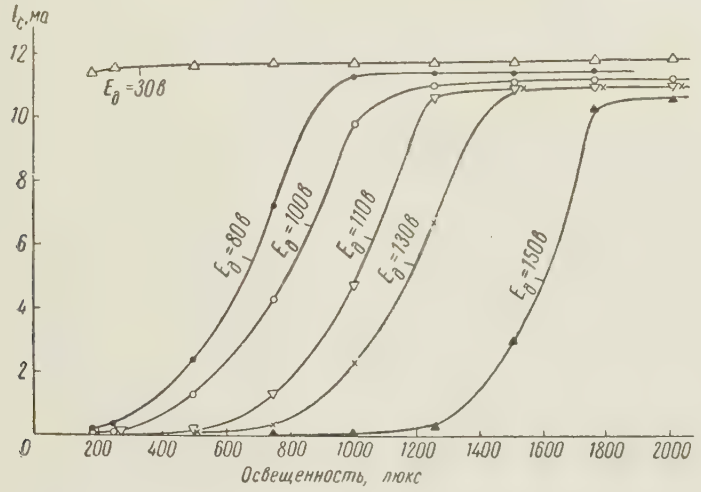


Рис. 11. Люксамперные характеристики тока стока при различных напряжениях $E_д$ ($U_c = 4в$; $R_д = 1{,}9$ *Мом*)

При снятии зависимостей рис. 11 и при других фотоэлектрических измерениях использовалась точечная лампа накаливания, дающая при нормальном накале световой поток 1750 *лм* (при цветовой температуре $\gtrsim$2850°К). Для подсчета чувствительности в амперах на люмен измерялась площадь светочувствительной поверхности образцов, которой

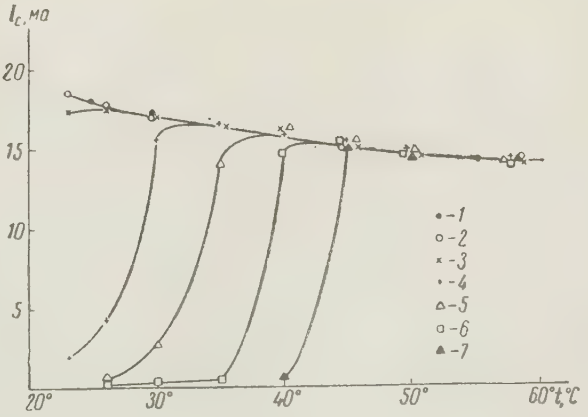


Рис. 12. Зависимость тока стока от температуры при различных напряжениях $E_д$ ($U_c = 8в$; $R_д = 1{,}9$ *Мом*):
1 — $E_д = 0$ *в*; *2* — $E_д = 20$ *в*; *3* — $E_д = 30$ *в*; *4* — $E_д = 50$ *в*; *5* — $E_д = 70$ *в*; *6* — $E_д = 100$ *в*; *7* — $E_д = 130$ *в*

являлась в нашем случае незакрытая контактом часть поверхности источника. В табл. 2 указаны максимальные чувствительности для четырех образцов. При измерениях на этих образцах рабочая точка выбиралась в той области, где образец имел наибольшую крутизну. Измерялось приращение тока стока при изменении освещенности на 50—120 *лк*.

Таблица 2

№ образца	Площадь светочувствительной поверхности, $мм^2$	Приращение освещенности, *лк*	Приращение тока стока, *ма*	Чувствительность, *а/лм*
346	2,0	56	4,9	44
380	0,5	50	5,4	216
365	1,0	120	8,6	71
1	0,6	59	5,65	159

3. Температурная зависимость

Исследовалось влияние температуры на работу в схеме фототриода (рис. 9). В этой схеме влияние температуры целиком аналогично влиянию подсветки, что хорошо видно из зависимостей тока стока от температуры при различных $E_д$, приведенных на рис. 12. Дополнительный эффект состоит в том, что с ростом температуры падает максимальный ток. Это падение связано с уменьшением подвижности электронов при росте температуры, и его величина совпадает с рассчитанной из этой предпосылки.

Чувствительность тока стока к температуре отличается от чувствительности тока затвора к температуре тем же множителем $GR_д$ (или GR_i), что и соответствующие фоточувствительности, и таким образом положение аналогично тому, что имеет место в обычных фототриодах. Поэтому целесообразно применять канальные фототриоды в качестве приемников модулированного излучения или отдельных световых импульсов, когда сопротивление $R_д$ в схеме рис. 9 можно заменить индуктивностью достаточной величины или, при постоянной частоте модуляции, резонансным контуром высокой добротности*.

Такая схема при достаточно мощном источнике смещения затвора, сохраняя высокую чувствительность к переменному световому сигналу, не реагирует на постоянную засветку и температурные изменения в небольших интервалах.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Показана возможность получения канальных триодов торцового типа с высокой крутизной и значительными рабочими токами при высокой кратности запирания. Исследование таких триодов указало на необходимость учета эффекта насыщения дрейфовой скорости электронов в сильных электрических полях в процессе анализа работы триодов. Канальные триоды могут служить в качестве чувствительных фототриодов. Их фоточувствительность может превысить фоточувствительность других известных полупроводниковых приборов. Температурная зависимость тока стока при $T<70^\circ$ С обусловлена температурной зависимостью подвижности электронов и температурной зависимостью смещения на затворе вследствие изменения тока затвора. Первая зависимость невелика, а вторая может быть подавлена применением источников постоянного смещения затвора с малым выходным сопротивлением и использованием в качестве управляющих элементов индуктивностей, контуров и других элементов

* На эту возможность нам указал В. С. Янович, применивший аналогичную схему управления для обычных фототриодов с управляемой базой, за что авторы выражают ему глубокую признательность.

с малым активным сопротивлением. При работе с большим сопротивлением в цепи затвора триоды могут быть использованы как высокочувствительные датчики температуры в небольших температурных интервалах.

Авторы считают своим приятным долгом выразить благодарность В. А. Фоменко и К. М. Кролевцу за обсуждение ряда вопросов, рассмотренных в работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. W. Shockley, Proc. I. R. E., 1952, 40, 11, 1365 (см. Проблемы современной физики, 1955, 2, 151).
2. G. C. Dacey, I. M. Ross, Proc. I. R. E., 1953, 41, 8, 970 (см. Проблемы современной физики, 1955, 2, 175).
3. G. C. Dacey, I. M. Ross, Bell System Techn. J., 1955, 34, 6, 1149.
4. R. M. Warner, W. H. Jackson, E. I. Doucette, H. A. Stone, Proc. I. R. E., 1959, 47, 1, 44.
5. N. Nelson, Proc. I. R. E., 1958, 26, 6, 1062.
6. J. B. Gunn, J. Electronics and Control, 1956, 2, 1, 87.

Поступила в редакцию
27 X 1960

РАДИОТЕХНИКА И ЭЛЕКТРОНИКА

1961 № 8

О ТЕОРИИ АВТОЭЛЕКТРОННОЙ И ТЕРМОАВТОЭЛЕКТРОННОЙ ЭМИССИЙ МЕТАЛЛОВ И ПОЛУПРОВОДНИКОВ

М. И. Елинсон, Ф. Ф. Добрякова, В. Ф. Крапивин, З. А. Малина, А. А. Яснопольская

Приведены численные расчеты плотности автоэлектронного и термоавтоэлектронного токов, а также распределения эмиттированных электронов по энергиям для металлов и полупроводников, с использованием нового выражения для прозрачности поверхностного барьера (3) и в широком интервале параметров E, T, μ, χ.

Результаты расчета отличаются от полученных ранее результатов для металлов на основании ВКБ-метода.

Получен ряд данных, важных для экспериментальных исследований и эксплуатации катодов.

Расчеты для полупроводников позволяют оценить пределы применимости простейших аналитических выражений, а также определить ряд параметров вещества эмиттера.

1. СОСТОЯНИЕ ТЕОРИИ

Как известно, квантово-механическая теория автоэлектронной эмиссии металлов и полупроводников основана на ряде допущений.

1. «Внутренний потенциал» металла или полупроводника является постоянным и совпадает с «дном» зоны проводимости, отстоящим от уровня вакуума на величину электронного сродства χ.

2. Потенциальный барьер на границе с вакуумом представляет собой барьер сил изображения $V = -e^2/4x$. Полная потенциальная функция изображается кривой ABx_0CG (рис. 1). Положение точки x_0 определяется из уравнения $\chi = eEx_0 + \frac{e^2}{4x_0}$.

3. На эмиттирующую поверхность падает поток электронов, вычисляемый из равновесной функции распределения по состояниям.

4. Задача считается одномерной; это находит свое выражение в зависимости потенциала только от одной координаты, в пренебрежении «пятнистостью» поверхности, «атомной структурой» поверхностного барьера, а также в вычислении прозрачности барьера при помощи одномерного уравнения Шредингера, причем прозрачность определяется энергиями, связанными с нормальными составляющими импульса электронов и совершенно не зависит от поперечных составляющих.

5. Изоэнергетические поверхности считаются сферическими.

Допущение 1, соответствующее зоммерфельдовской модели, мало обосновано, но, как хорошо известно, его трудно обойти простыми средствами.

Допущение 2 близко соответствует истине, начиная с некоторого расстояния от поверхности (например, от точки C, $x \simeq 3$Å, рис. 1). На более близких расстояниях ход потенциальной функции в настоящее время теоретически не получен. Уже давно (Ленгмюр, Шоттки) высказывались на этот счет различные эвристические предположения, которые трудно проверить. В последнее время, в связи с экспериментально наблюдаемыми аномалиями в ходе вольтамперных характеристик автоэлектронной эмиссии при предельно высоких плотностях тока, вновь высказано пред-

положение [1] об отличии истинного барьера от закона сил изображения (кривая $ABCG$, рис. 1). Аномалии должны быть особенно сильными при сложных формах барьеров (присутствие адсорбированных слоев). Попытка количественной обработки уравнений эмиссии при некотором специальном предположении о барьере $V = -\dfrac{e^2}{4x + \dfrac{e^2}{\chi}}$ сделана Г. Ф. Васильевым [2].

Отметим, что происхождение аномалий к настоящему времени с достоверностью не установлено.

Коррекция закона сил изображения для полупроводников к настоящему времени также не установлена и в теории принимается

$$V = -\frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon + 1}\frac{e^2}{4x}$$

(ε — диэлектрическая проницаемость).

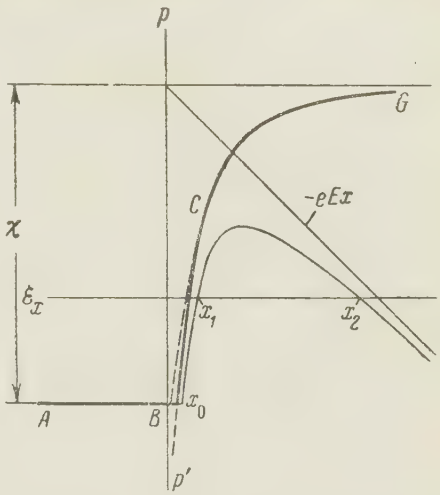


Рис. 1. Потенциальный барьер на границе твердое тело — вакуум

Допущение 3 справедливо для металлов и низкоомных полупроводников и очень плохо выполняется для высокоомных полупроводников с малым χ [3].

Допущения 4 и 5 мало обоснованы, но так же, как и в случае 1, их трудно обойти простыми средствами.

В большинстве работ прозрачность потенциального барьера D вычисляется при помощи квазиклассического (ВКБ) метода. Для барьера сил изображения

$$D = \frac{|\Psi_{\text{по}}|^2}{|\Psi_{\text{над}}|^2} = \exp\left\{-\frac{4\sqrt{2}}{3}\frac{m^{1/2}|\mathscr{E}_x|^{3/2}}{\hbar eE}\Theta(y)\right\}, \qquad (1)$$

где $\mathscr{E}_x = \dfrac{p_x^2}{2m} + V$; E — внешнее поле; $\Theta(y)$ — функция Нордгейма:

$$\Theta(y) = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{1 + \sqrt{1 - y^2}}\,[L(k') - (1 - \sqrt{1 - y^2})\,K(k')]. \qquad (2)$$

В выражении (2) $y = e\sqrt{eE}/|\mathscr{E}_x|$ (для металлов), $k' = (2\sqrt{1 - y^2}/(1 + \sqrt{1 - y^2})^{1/2}$; $L(k')$ и $K(k')$ — полные эллиптические интегралы первого и второго родов.

Как известно, недостатком ВКБ-метода является неопределенность решений для Ψ-функций в классических «точках поворота» x_1 и x_2 (см. рис. 1) и его плохая применимость для неплавных барьеров и барьеров с малой площадью над данным уровнем $\mathscr{E}_x$.

Таким образом, метод становится в принципе мало надежным при вычислении термоавтоэлектронной эмиссии и автоэлектронной эмиссии веществ с малыми работами выхода. Между тем, он широко применялся в аналитических [4] и численных [5] расчетах для металлов, а также в аналитических расчетах для полупроводников [6].

В последние годы для построения общей теории термо- и автоэлектронной эмиссий [7] стало привлекаться приближенное выражение для прозрачности потенциального барьера, пригодное в принципе для электро-

нов любых энергий, как ниже, так и выше пика барьера [8]. Для случая закона сил изображения

$$D = \left\{1 + \exp\left[\frac{4\sqrt{2}}{3}\,\frac{m^{1/2}|\mathscr{E}_x|^{3/2}}{\hbar eE}\,\theta(y)\right]\right\}^{-1}. \qquad (3)$$

Однако ввиду сложности проблемы для вычисления тока использовались многочисленные аппроксимации, приводящие к узким интервалам температуры и поля, в которых справедливы окончательные аналитические выражения. Некоторые аппроксимации по существу означают возврат к ВКБ-методу. К тому же формулы громоздки и неудобны для экспериментаторов. Это замечание в равной мере относится к металлам и к полупроводникам, хотя некоторые формулы для полупроводников (случай невырожденного газа) имеют более широкие области применения [9].

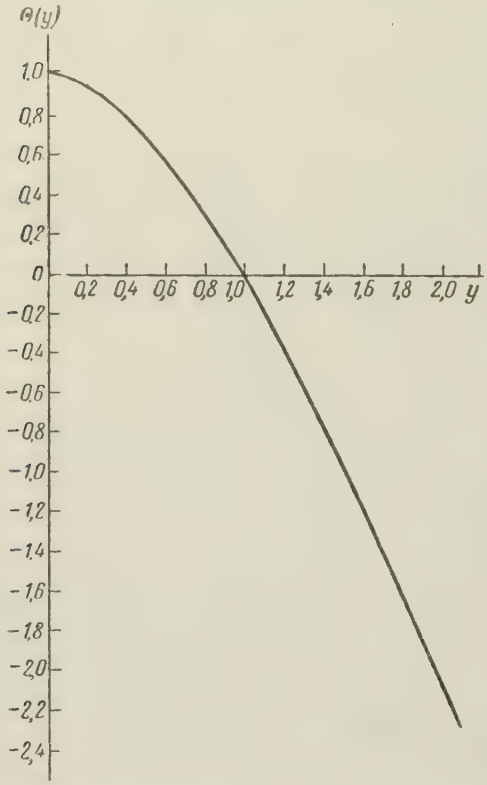


Рис. 2. График функции Нордгейма $\theta(y)$

Такое состояние теории привело нас к мысли выполнить численный расчет плотности автоэлектронного и термоавтоэлектронного токов, а также распределения по энергиям для металлов и полупроводников с использованием выражения (3), чтобы извлечь максимальное количество сведений, необходимых для сравнения эксперимента с теорией и для эксплуатации катодов, а также оценить пределы применимости простейших приближенных аналитических выражений. Мы решили сохранить равновесную функцию распределения электронов по состояниям, поскольку она справедлива для широкого круга веществ. При этом сохраняется возможность сравнения расчета с расчетами [5], [6]. По этой же причине мы решили сохранить барьер сил изображения, который, кроме того, так же физически обоснован, как и некоторые другие разумные формы барьеров.

2. МЕТАЛЛЫ

В основу расчета плотности автоэлектронного и термоавтоэлектронного токов для металлов мы положим интеграл

$$j = \frac{4\pi mekT}{h^3}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\ln\left\{1 + \exp\left[-\dfrac{\mathscr{E}_x - \mu}{kT}\right]\right\} d\mathscr{E}_x}{1 + \exp\left\{\dfrac{4\sqrt{2}}{3}\,\dfrac{m^{1/2}|\mathscr{E}_x|^{3/2}}{\hbar eE}\,\theta\left(\dfrac{e\sqrt{eE}}{|\mathscr{E}_x|}\right)\right\}}. \qquad (4)$$

Подынтегральное выражение представляет собой произведение равновесного потока частиц вырожденного газа, имеющих энергии $\mathscr{E}_x$ в ин-

тервале $\mathscr{E}_x$, $\mathscr{E}_x + d\mathscr{E}_x$, на выражение (3). Отсчет энергии ведется от уровня вакуума. Значение $-\chi$ заменено на $-\infty$ ввиду большого энергетического интервала заполненной части зоны проводимости.

При общей сложности интеграла в целом особую сложность в вычисления вносит функция Нордгейма $\Theta(y)$. В случае ВКБ-метода достаточно знания функции $\Theta(y)$ в интервале $0 \leqslant y \leqslant 1$. В этом интервале она недавно протабулирована [10]. Для наших расчетов пришлось провести табулирование $\Theta(y)$ в области $y \geqslant 1$ при помощи общего выражения (2). График $\Theta(y)$ представлен на рис. 2. В интервале $0 \leqslant y \leqslant 1$ отмечается хорошее совпадение с данными [10]. При выборе параметров E, T, μ мы стремились в их число включить и те, которыми пользовались авторы работы [5], применившие в расчете выражение (1).

Результаты расчета представлены на рис. 3 в обычно принятых координатах $\lg j = f(1/E)$ для интервала $\varphi = 2$—$4{,}5$ *эв* и $T = 0$—$3000°$ К.

Общий ход вольтамперных характеристик лучше всего проследить для материалов с малой работой выхода $\varphi = -\mu = 2$ *эв*. На рис. 4 представлены кривые $\lg j = f(1/E)$ (кривая *1*) и $\lg(j/E^2) = f(1/E)$ (кривая *2*) для $kT = 0$ и $\varphi = 2$ *эв*. При малых j кривая *1* представляет собой прямую линию. Далее, при поле E, заметно меньшем критического поля $E_{кр}$, при котором $y = e\sqrt{eE_{кр}}/\varphi = 1$, кривая отклоняется от прямолинейного хода в сторону снижения j. Затем ясно заметно стремление к увеличению скорости возрастания j при полях E, бо́льших критического. При еще бо́льших полях можно предположить наличие шоттковских девиаций.

На кривой *2* более отчетливо наблюдается тот факт, что отход от прямолинейности начинается задолго до достижения $E_{кр}$. Здесь имеется заметное отличие от результатов расчета [5], в котором использовалось ВКБ-приближение. Отличие естественно объясняется тем, что при малых E

$$\exp\left\{\frac{4\sqrt{2}}{3}\frac{m^{1/2}|\mathscr{E}_x|^{3/2}}{\hbar eE}\Theta(y)\right\} \gg 1,$$

и оба результата должны совпадать. При увеличении E экспонента близка к единице, и новая прозрачность барьера заметно меньше квазиклассической. Типичная форма экспериментальных характеристик $\lg j = f(1/E)$ сходна с формой кривой *1* на рис. 4. Однако в ряде случаев отход от прямолинейности в сторону снижения j и последующий более быстрый рост j происходят, по-видимому, при еще меньших, сравнительно с $E_{кр}$, электрических полях.

Интересное положение возникает в связи с тем, что подобный же ход характеристик может быть получен в предположении отличий формы барьера от закона сил изображения или при учете пространственного заряда, связанного с эмиссией.

Результаты расчета позволяют теоретически исследовать вопрос о распределении эмиттированных электронов по энергиям при изменении E и T в широких пределах. В случае автоэлектронной эмиссии распределение по полным энергиям $P(\mathscr{E})d\mathscr{E}$ заметно отличается от распределения по нормальным составляющим $P(\mathscr{E}_x)d\mathscr{E}_x$. Расчет $P(\mathscr{E})d\mathscr{E}$ в [5] не производился. Мы не приводим все рассчитанные распределения. На рис. 5 представлено лишь несколько распределений $P(\mathscr{E})$ в относительных единицах. Нуль соответствует уровню μ; $\varphi = 4{,}5$ *эв* (для сравнения с рис. 6). При $E = \text{const}$ с ростом T максимум смещается в сторону бо́льших энергий и распределение закономерно расширяется. При $T = \text{const}$ с ростом E максимум смещается в сторону меньших энергий и распределение вначале сужается, а затем остается примерно постоянным.

Распределения $P(\mathscr{E})$ определяют шумовые свойства катодов. Оказывается, что полуширина распределения по полным энергиям всегда меньше таковой для энергий $\mathscr{E}_x$. Однако именно последние использовались для оценки эффективной температуры автоэлектронных катодов [11], вследствие чего эффективная температура оказалась сильно завышенной.

На рис. 6 приведено несколько распределений для энергии $\mathscr{E}_x$ (сплош-

ные кривые). Трансформация формы и ширины кривых при $T = \text{const}$ и $E = \text{var}$, а также при $E = \text{const}$ и $T = \text{var}$ довольно очевидна. Пунктирными кривыми нанесены соответствующие результаты расчета [5]. Отчетливо видно, что использование ВКБ-приближения завышает роль в эмиссии термически возбужденных электронов.

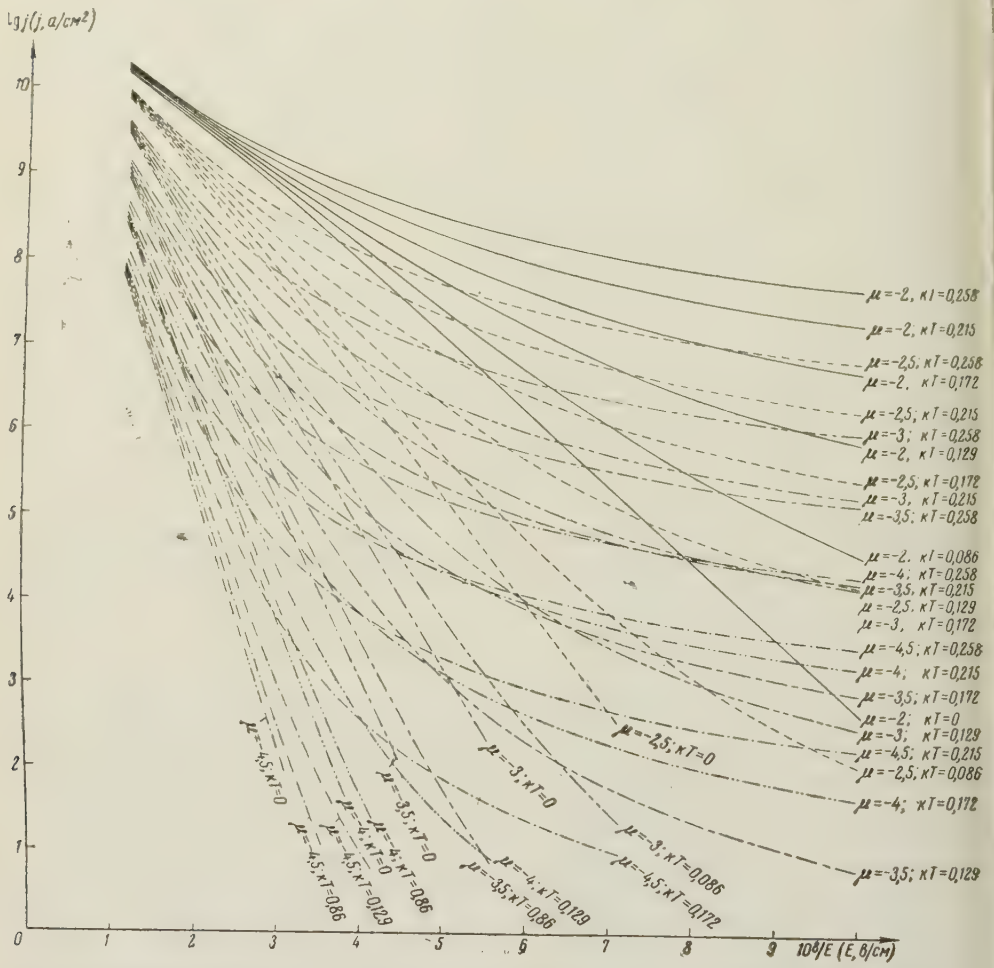


Рис. 3. Зависимость $\lg j = f(1/E)$, полученная численным расчетом для металлов по уравнению (4) (для интервала $\varphi = 2—4{,}5$ *эв* и $T = 0—3000°$ K)

Результаты расчета позволяют произвести выбор различных режимов эксплуатации эмиттеров, т. е. оптимальный выбор E и T. Так, например, если при повышении T удается сохранить j, понизив поле E от величины E_1 до E_2, то при том же напряжении U удается поднять общий ток в $(E_1/E_2)^2$ раз.

На рис. 7 представлена серия изоамперных кривых в координатах E, T для $\varphi = 2{,}5$; 3,5; 4,5 *эв* и для четырех значений j. Из кривых видно, что при повышении T не удается резко снизить E. Однако необходимо заметить, что при весьма высоких напряжениях всякая возможность их понижения играет важную роль.

Из кривых, приведенных на рис. 3, можно извлечь важные сведения об изменении крутизны характеристик при различных режимах $\frac{dj}{dE} = \gamma \frac{di}{dU}$, а также о их нелинейных свойствах, связанных с величиной d^2j/dE^2, на чем мы не останавливаемся.

Рис. 4. Типичный ход характеристик $\lg j = f(1/E)$ и $\lg(j/E^2) = f(1/E)$ для металлов

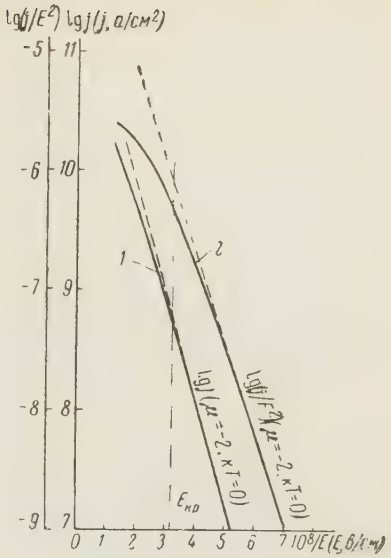


Рис. 4

Рис. 5. Распределение эмиттированных электронов по полным энергиям для металлов:

а — $E = 7{,}2 \cdot 10^7$ *в/см*, $\mu = -4{,}5$, *1* — $kT = 0$, *2* — $kT = 0{,}086$, *3* — $kT = 0{,}172$, *4* — $kT = 0{,}258$; *б* — $kT = 0{,}086$, $\mu = -4{,}5$, *1* — $E = 2 \cdot 10^7$ *в/см*, *2* — $E = 3{,}4 \cdot 10^7$ *в/см*, *3* — $E = 5{,}2 \cdot 10^7$ *в/см*, *4* — $E = 7{,}2 \cdot 10^7$ *в/см*

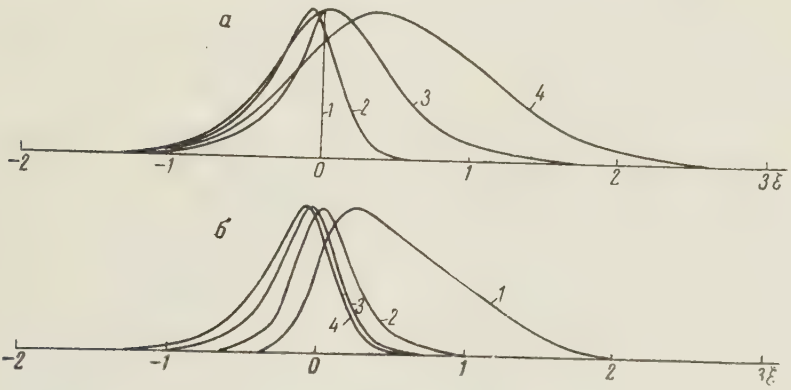


Рис. 5

Рис. 6. Распределение эмиттированных электронов по энергиям $\mathscr{E}_x$ для металлов:

1 — $E = 5{,}2 \cdot 10^7$ *в/см*, $\mu = -4{,}5$ *эв*; *2* — $kT = 0{,}172$, $\mu = -4{,}5$ *эв*

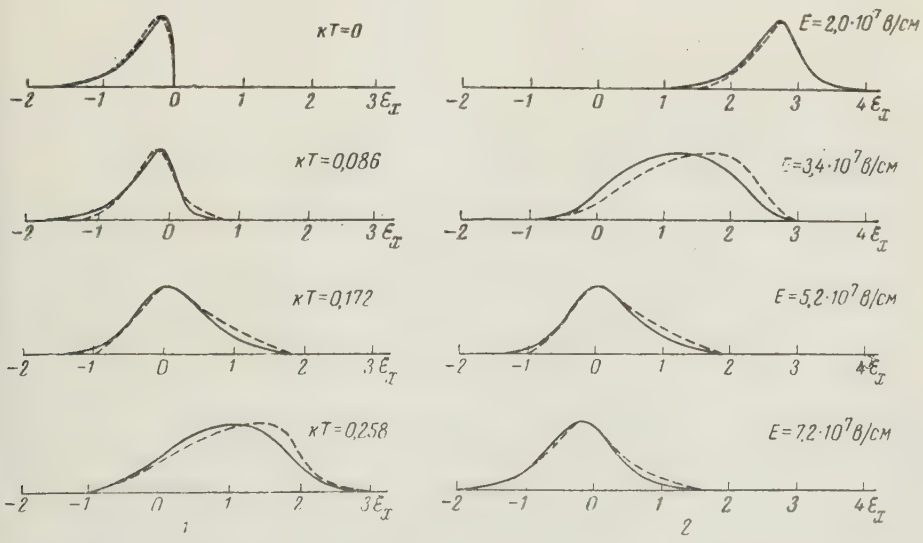


Рис. 6

Результаты расчета позволяют предложить простой метод определения работы выхода вещества эмиттера φ и поверхностного поля E без вычисления последнего при помощи сложных и малонадежных электростатических формул.

Для определения φ и E необходимо в принципе воспользоваться экспериментальными вольтамперными характеристиками $\lg i = f(1/U)$, снятыми при двух различных температурах эмиттера. Предполагается достаточно точное измерение температуры эмиттера, а также знание его эмиттирующей поверхности по электронным

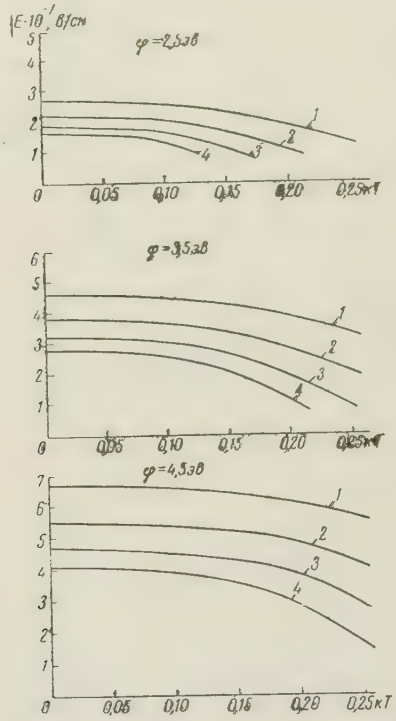


Рис. 7

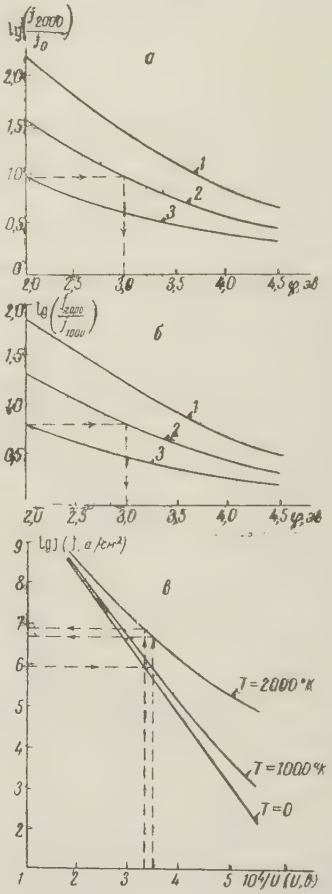


Рис. 8

Рис. 7. Кривые равных плотностей тока при одновременном изменении E и T для значений φ = 2,5; 3,5; 4,5 эв:

1 — $j = 1 \cdot 10^7$ а/см²; *2* — $j = 1 \cdot 10^6$ а/см²; *3* — $j = 1 \cdot 10^5$ а/см²; *4* — $j = 1 \cdot 10^4$ а/см²

Рис. 8. Иллюстрация метода определения поверхностного электрического поля E и работы выхода φ:

а — расчетная зависимость: *1* — $j_0 = 10^5$ а/см², *2* — $j_0 = 10^6$ а/см², *3* — $j_0 = 10^7$ а/см²; *б* — расчетная зависимость: *1* — $j_{1000} = 10^5$ а/см², *2* — $j_{1000} = 10^6$ а/см², *3* — $j_{1000} = 10^7$ а/см²; *в* — экспериментально снятая зависимость

фотографиям. В определении указанных величин заключаются источники погрешностей, однако хорошо известно, что возможные ошибки здесь значительно меньше тех, которые связаны с вычислением поля E.

Предлагаемый метод проиллюстрирован на рис. 8. Графики *а* и *б* представляют собой найденные расчетом теоретические зависимости $\lg(j_{2000}/j_0) = f(\varphi)$ и $\lg(j_{2000}/j_{1000}) = f(\varphi)$, где φ — работа выхода; j_{2000}, j_{1000}, j_0 — плотности тока при соответствующих температурах. Кривые на этих графиках построены при неизменных значениях j_0 или j_{1000}. На

графике *в* схематически представлены экспериментальные характеристики $\lg j = f(1/U)$ (j определена по эмиттирующей площади).

Задаваясь величиной j_0 или j_{1000}, например $j_0 = 10^6 a/см^2$, можно по характеристикам определить j_{2000}, а затем по теоретическим графикам определить φ. По величине φ можно в конечном счете определить величину $\frac{d(\lg j)}{d(1/E)}$. Зная экспериментальную величину $\frac{d(\lg j)}{d(1/U)}$, можно определить геометрический фактор $\beta = \frac{E}{U}$, а следовательно, и поле на вершине эмиттера (E). Тем самым можно в эксперименте достаточно точно определить область рабочих электрических полей, что имеет исключительное значение для физической интерпретации результатов опыта.

Описанный метод близок к известному методу И. С. Андреева [12], но не требует громоздких вычислений и не основывается на аналитической формуле Гаса и Малина, имеющей ограниченную область применения.

Важно отметить, что при выборе не очень высоких исходных величин j_0 и j_{1000} результаты определения φ и E будут справедливы даже в том случае, если истинный поверхностный барьер отклоняется от закона сил изображения.

Таким образом, расчеты для металлов позволяют получить ряд интересных следствий, важных как для понимания механизма эмиссии, так и для экспериментальных исследований.

3. ПОЛУПРОВОДНИКИ

В основу расчета плотности автоэлектронного и термоавтоэлектронного токов для полупроводников мы положим интеграл

$$j = e\int_0^\infty n\left(\frac{1}{2\pi mkT}\right)^{1/2}\exp\left(-\frac{\mathscr{E}_x}{kT}\right)\frac{d\mathscr{E}_x}{1+\exp\left\{\frac{4\sqrt{2}}{3}\,\frac{m^{1/2}|\chi-\mathscr{E}_x|^{3/2}}{\hbar eE}\,\theta(y)\right\}}. \quad (5)$$

Для удобства отсчет энергии производится от дна зоны проводимости. Кроме того, в этом случае, как легко показать,

$$y = \left(\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon+1}\right)^{1/2}\frac{e\sqrt{eE}}{|\chi-\mathscr{E}_x|}.$$

Интеграл (5) основан на представлении о невырожденном электронном газе во всем интервале полей E. Мы считаем этот случай наиболее характерным и интересным для автоэлектронной эмиссии полупроводников.

Электронный газ в полупроводнике может быть вырожден независимо от приложения внешнего поля. В этом случае для вычисления плотности автоэлектронного тока с большой точностью пригодны формулы для металлов. Вырождения же электронного газа в приповерхностных слоях полупроводников под влиянием проникновения внешнего поля можно ожидать лишь для веществ с очень большим χ, когда при высоких полях практически не происходит отбора тока, нарушающего равновесный характер процессов.

В практически интересных случаях сравнительно высокоомных веществ с малым χ электрический пробой и разрушение эмиттера предшествуют вырождению.

Поскольку в невырожденном случае n зависит от T, целесообразно вычислять j/n. Для перехода к j надо осуществить параллельный сдвиг характеристик $\lg(j/n) = f(1/E)$ вдоль оси ординат.

Определенную трудность при выборе параметров численного интегрирования представляет соотношение между электронным сродством χ и диэлектрической проницаемостью ε. Величина χ связана с ε (например

в предположении закона сил изображения, соотношением $\chi = \frac{e^2}{2a}\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon+1}$, где a — постоянная решетки). В то же время ε входит в формулу явно через аргумент функции Нордгейма.

Мы считали возможным задавать χ и ε независимо (в частности, различные χ при одинаковых ε), поскольку таким образом обеспечивается большой набор возможных комбинаций. В принципе всегда можно подобрать соответствующие полупроводники.

В работе [6] интеграл, аналогичный (5) (с ВКБ-прозрачностью), вычислен чрезмерно упрощенным способом. При условии

$$eE \geqslant \frac{2\sqrt{2}\,m^{1/2}}{\hbar}\chi^{1/3}kT \text{ (критерий Стреттона)} \qquad (6)$$

прозрачность практически не зависит от энергии электронов и соответствует, например, прозрачности для дна зоны проводимости.

В этом случае получается простая аналитическая формула для j:

$$j = ne\left(\frac{kT}{2\pi m}\right)^{1/2}\exp\left\{-\frac{4\sqrt{2}}{3}\frac{m^{1/2}\chi}{\hbar eE}\Theta(y)\right\}. \qquad (7)$$

Главной задачей расчета является получение точного теоретического хода вольтамперных характеристик с использованием нового выражения для прозрачности и сравнение их в основном с наиболее простой формулой (7).

На рис. 9 представлены полученные в результате расчета характеристики $\lg(j/n) = f(1/E)$ для интервала значений $\chi = 0{,}7 - 4$ *эв*, $kT = 0{,}026 - 0{,}129$ *эв* и типичного значения $\varepsilon = 6$ (сплошные кривые)*.

Нетрудно заметить ряд интересных особенностей указанных характеристик. Во-первых, при определенных для каждого χ значениях $E_{кр}$ кривые переходят в область насыщения. Этот факт отличает поведение полупроводников от поведения металлов, для которых после достижения $E_{кр}$ наблюдается сложный ход кривых (кривая *1* на рис. 4).

В настоящее время трудно дать рациональное объяснение такому различию.

Значения $E_{кр}$, полученные расчетом, хорошо соответствуют простой формуле $\left(\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon+1}\right)^{1/2}\frac{e\sqrt{eE_{кр}}}{\chi} = 1$, причем этот результат ни в коей мере не является тривиальным.

Отметим, во-первых, что предельная величина j/n растет с увеличением T. Это легко объясняется тем, что при данной концентрации поток частиц, падающих на поверхность, растет с увеличением средней тепловой скорости.

Во-вторых, наклон квазилинейных участков характеристик заметно уменьшается с повышением температуры. Это в особенности заметно для малых χ, но вполне явно проявляется и для больших χ.

В-третьих, интервал j, охватываемый квазилинейными участками характеристик, резко уменьшается с ростом температуры.

В-четвертых, при относительно низких E ясно наблюдаются термоэлектронные «хвосты».

На рис. 9 пунктиром показаны характеристики $\lg(j/n) = f(1/E)$, построенные согласно уравнению (7) при $kT = 0{,}026$ *эв* (комнатная температура). Характеристики для более высоких температур получаются параллельным сдвигом вдоль оси ординат. Штрих-пунктирные линии на

* Мы не приводим аналогичных серий кривых для других значений ε.

ис. 9 разграничивают для каждой температуры две области, причем слева при больших E) справедливо соотношение (6).

Сравнение точных характеристик с выражением (7) приводит к следующим выводам.

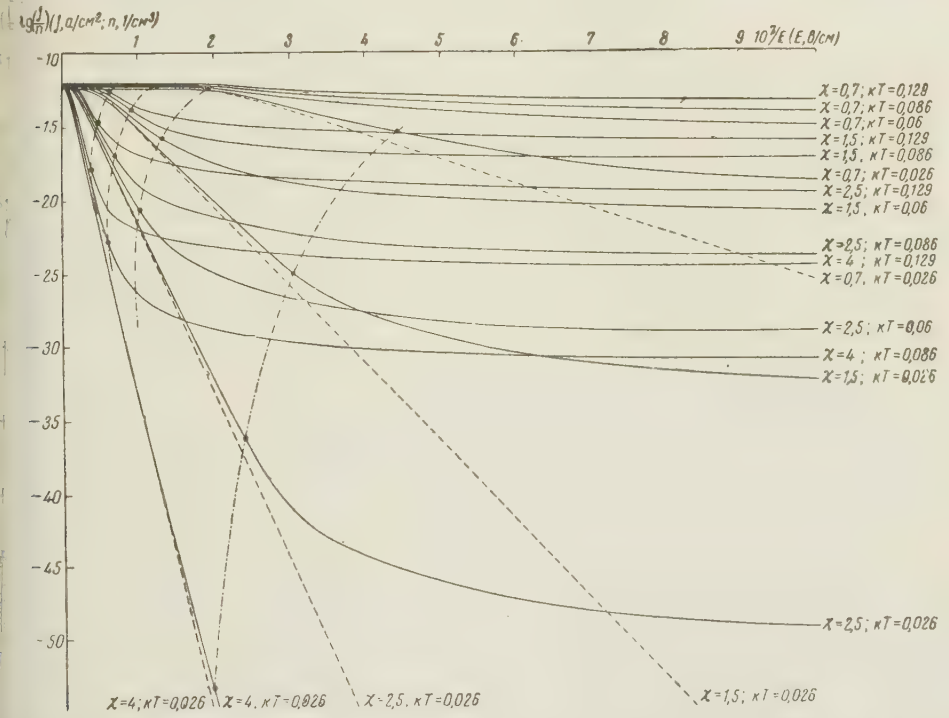


Рис. 9. Зависимость $\lg(j/n) = f(1/E)$, полученная численным расчетом для полупроводников по уравнению (5) для интервала $\chi = 0{,}7 - 4$ *эв*, $T = 300 - 1500°$ К и $\varepsilon = 6$, пунктирные кривые соответствуют формуле Стреттона (7) для $T = 300°$ К. Штрихпунктирные линии построены на основании критерия (6)

1. Теория Стреттона выполняется тем лучше, чем ниже T и больше χ. При повышенных температурах наклоны прямых Стреттона и квазилинейных участков истинных характеристик заметно различаются. При малых χ и повышенных T практически не существует области E, где применима теория Стреттона.

2. Минимальное значение E (при $kT = 0{,}026$ *эв*) согласно соотношению (6) практически соответствует концу квазилинейного участка истинной характеристики. Знак сильного неравенства в (6) является излишним, и при низких температурах теория Стреттона справедлива в более широких пределах E.

3. При низких температурах наклон квазилинейных участков характеристик $\operatorname{tg}\alpha$ близок к наклону прямых Стреттона $\operatorname{tg}\alpha_c$.

На рис. 10 представлено для $kT = 0{,}026$ *эв* отношение $\sigma = \operatorname{tg}\alpha_c/\operatorname{tg}\alpha$, в зависимости от сродства χ.

Из рис. 10 следует важный для экспериментатора вывод о том, что электронное сродство можно определять из экспериментальных характеристик, пользуясь простой формулой

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{d(\lg j)}{d\left(\frac{1}{E}\right)} = -6{,}85 \cdot 10^7 \chi^{3/2} S(y), \qquad (8)$$

где

$$S(y) = \theta(y) - \frac{y}{2}\frac{d\theta}{dy}.$$

На этом же рисунке представлена зависимость от χ числа порядков j/n, охватываемого квазилинейной областью при $kT = 0{,}026$ *эв*, что весьма важно для экспериментальных исследований.

Измерения автоэлектронной эмиссии, как ясно из предыдущего, позволяют экспериментально одновременно определять такие важные параметры полупроводников, как χ, ε, n, а также энергию активации проводимости по параллельному сдвигу участков насыщения. Таким образом, расчеты для полупроводников позволяют получить ряд важных следствий, ценных как для понимания механизма эмиссии, так и для экспериментальных исследований.

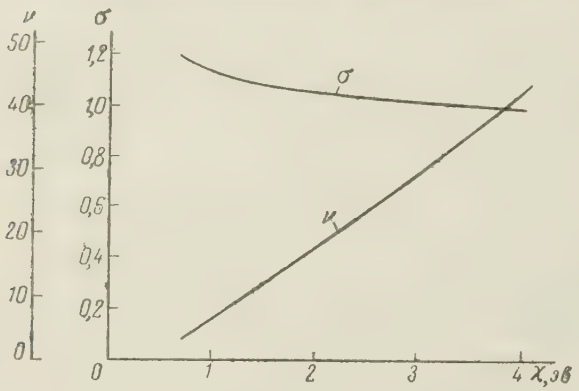


Рис. 10. Зависимость $\sigma = \operatorname{tg}\alpha_c/\operatorname{tg}\alpha$ и числа порядков ν квазилинейной области характеристик $\lg(j/n) = f(1/E)$ от χ

При расчете плотности эмиссионного тока мы сознательно не упоминали о специфических эффектах для полупроводников: проникновение внешнего поля и влияние поверхностных состояний электронов.

Правильный учет этих эффектов обычно очень сложен. Методы, развитые в [6], во многом спорны. Так, например, расчет проникновения поля производится на основании электростатических соображений при неизменном уровне химического потенциала, независимо от значения плотности отбираемого тока. Между тем, очевидно, что это полностью несправедливо при $E/\varepsilon \simeq j\,\rho$ (ρ — удельное сопротивление полупроводника), т. е. в большинстве интересных случаев.

Для расчета приповерхностной концентрации электронов надо применить другие методы, развитые, например, в работе [13]. Поэтому часто применяемое выражение $n = n_\infty \exp(\Delta R/kT)$, где n — приповерхностная концентрация; n_∞ — невозмущенная концентрация; ΔR — загиб зон вблизи поверхности, справедливо лишь при очень малых j. Учет роли поверхностных состояний, произведенный в работе [6], справедлив только для некоторых специальных случаев (две локальные системы поверхностных уровней, динамический обмен электронами только с зоной проводимости).

Можно полагать, что для полупроводников с высоким ρ и малым χ, каковыми являются многие ионные кристаллы, правильнее всего не учитывать проникновения внешнего поля. При этом внутреннее поле в полупроводнике определяется проходящим током.

Для таких полупроводников можно пренебречь также ролью поверхностных состояний, поскольку обычно работа происходит при электрических полях, при которых барьер, вызванный поверхностными состояниями, «прорван».

Ряд экспериментальных характеристик [14] действительно соответствует рис. 9.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

1. В работе приведены численные расчеты плотности автоэлектронного и термоавтоэлектронного токов, а также распределения эмиттированных электронов по энергиям для металлов и полупроводников, с использованием нового выражения для прозрачности поверхностного барьера (3) и в широком интервале параметров E, T, μ, χ.

2. Установлено отличие хода вольтамперных характеристик сравнительно с вычисленными по ВКБ-методу.

3. Установлено, что ВКБ-метод приводит к завышению роли термически возбужденных электронов в эмиссии.

4. При низких температурах полуширина кривой распределения по полным энергиям меньше таковой для $\mathscr{E}_x$.

5. Получен ряд изоамперных кривых (при одновременном изменении E и T), важных для эксплуатации катодов.

6. Предложен простой метод определения работы выхода и поверхностного электрического поля без расчета последнего, что весьма важно для экспериментальных исследований.

7. Установлено, что общий ход вольтамперных характеристик эмиссии для полупроводников существенно отличается от хода для металлов в области высоких плотностей тока. Показано, что при помощи исследования автоэлектронной эмиссии можно определить ряд параметров полупроводников.

8. Рассмотрены пределы применимости простой теории [6]. Установлено, что при высоких температурах она практически неприменима, в то время как при комнатной температуре пределы ее применимости достаточно широки и ею можно надежно пользоваться при экспериментальных исследованиях.

ЛИТЕРАТУРА

1. T. J. Lewis, Phys. Rev., 1956, **101**, 6, 1694.
2. Г. Ф. Васильев, Радиотехника и электроника, 1960, **5**, 11, 1857.
3. М. И. Елинсон, Радиотехника и электроника, 1959, **4**, 1, 140.
4. E. Guth, C. J. Mullin, Phys. Rev., 1942, **61**, 4, 339.
5. W. W. Dolan, W. P. Dyke, Phys. Rev., 1954, **95**, 2, 327.
6. R. Stratton, Proc. Phys. Soc., B, 1955, **68**, 430, 746.
7. E. L. Murphy, K. H. Good, Phys. Rev., 1956, **102**, 6, 1464.
8. S. C. Miller, K. H. Good, Phys. Rev., 1953, **91**, 1, 174.
9. Г. Ф. Васильев, Радиотехника и электроника, 1958, **3**, 7, 962.
10. R. E. Burgess, H. Kroemer, J. M. Houston, Phys. Rev., 1953, **90**, 4, 515.
11. R. W. DeGrass, G. Wade, Proc. I. R. E., 1956, **44**, 8, 1048.
12. И. С. Андреев, ЖТФ, 1953, **23**, 5, 849.
13. К. Б. Толпыго, Радиотехника и электроника, 1958, **3**, 8, 980.
14. М. И. Елинсон, А. Г. Ждан, Г. Ф. Васильев. Радиотехника и электроника, 1960, **5**, 12, 2004.

Поступила в редакцию
21 XI 1960

РАДИОТЕХНИКА И ЭЛЕКТРОНИКА

1961 № 8

ТЕПЛОВОЕ ИЗЛУЧЕНИЕ, СОЗДАВАЕМОЕ ГОРЯЧИМИ НОСИТЕЛЯМИ ТОКА В ПОЛУПРОВОДНИКАХ

Ш. М. Коган

Производится теоретический расчет теплового излучения, создаваемого горячими носителями тока в однородном полупроводнике, на который наложено сильное однородное электрическое поле. Оценка полученного выражения для интенсивности излучения показывает, что это излучение доступно для наблюдения на опыте. Кратко рассмотрены некоторые особенности и возможные применения излучения.

Наличие свободных носителей тока (электронов проводимости и дырок) в полупроводниках приводит, как известно, к поглощению электромагнитного излучения (см., например, [1]). Отсюда немедленно следует, что свободные носители тока вносят вклад в тепловое излучение полупроводника. Создаваемое носителями тока излучение, как и обусловленное ими поглощение электромагнитной радиации, возникает при рассеянии носителей на колебаниях решетки, примесях и, в сущности, представляет собой тормозное излучение.

Значительного теплового излучения носителей тока следует, естественно, ожидать тогда, когда средняя энергия беспорядочного движения носителей $\overline{E}$ отвечает достаточно высоким температурам. Это имеет место при наложении на полупроводник сильного поля, когда носители становятся «горячими»: их средняя энергия $\overline{E} \gg \frac{3}{2} \varkappa T$, где T — температура решетки полупроводника; $\varkappa$ — постоянная Больцмана [2]. Тепловое излучение горячих носителей тока может быть обнаружено в этом случае как изменение излучательной способности полупроводника при разогревании в нем электронного (или дырочного) газа с помощью сильного поля.

Чтобы оценить величину эффекта, вычислим спектральное распределение интенсивности излучения горячих носителей тока в гомеополярном полупроводнике типа Ge. Сделаем несколько упрощающих расчет допущений. Примем, что длина свободного пробега l для рассеяния импульса определяется взаимодействием носителей с акустическими фононами. Это допущение не исключает из рассмотрения тот случай, когда длина пробега для рассеяния энергии носителя больше l и определяется взаимодействием с оптическими фононами. Последнее влияет на вид симметричной функции распределения $n_e(p)$, т. е. на распределение носителей по энергиям E_p, и тем самым — на интенсивность излучения.

Ограничимся областью частот излучения ω, удовлетворяющих неравенству

$$\omega \gg 1/\tau, \tag{1}$$

где τ — эффективное время свободного пробега носителей тока. В этом случае можно ограничиться учетом однофононного рассеяния, поскольку за время τ между двумя последовательными актами рассеяния электромагнитное поле успевает совершить большое число колебаний.

В условиях, когда выполняется неравенство (1), размеры образца полупроводника обычно значительно превосходят длину волны излучения, вследствие чего дифракционные явления можно не принимать в расчет.

Будем считать, что энергетический коэффициент поглощения K столь мал в интересующем нас спектральном интервале, что поглощением излучения внутри образца можно пренебречь; излучение тогда просто пропорционально объему образца V. Этот случай обычно и реализуется в области длин волн за краем собственного поглощения полупроводника.

Подробное изложение расчета вероятности излучения фотона электроном (или дыркой) при рассеянии на акустических колебаниях решетки нецелесообразно: можно воспользоваться выражением для вероятности поглощения фотона (см., например, [1]). Для вероятности излучения фотона с волновым вектором $\mathbf{k}$ и поляризацией в направлении единичного вектора $\mathbf{e}_\lambda$ получаем

$$w_{\text{исп}}^{\text{погл}} = \frac{(2\pi)^2}{V^2}\frac{e^2}{\varepsilon\hbar\omega^2 m^2}\frac{E_1^2\hbar f}{2\rho u}\begin{Bmatrix}\overline{N}_{\mathbf{f}}\\ \overline{N}_{\mathbf{f}}+1\end{Bmatrix}(\mathbf{f}\mathbf{e}_\lambda)\,\delta\left(\omega_{\mathbf{k}}\mp\Omega_{\mathbf{f}}-\frac{E_{\mathbf{p}}-E_{\mathbf{p}\pm\mathbf{f}}}{\hbar}\right). \qquad (2)$$

Здесь верхние знаки относятся к процессу с поглощением фонона, нижние — к процессу с испусканием фонона при излучении фотона; $\mathbf{f}$ и $\Omega_{\mathbf{f}}$ — волновой вектор и энергия фонона; $\overline{N}_{\mathbf{f}}$ — среднее число фононов с волновым вектором $\mathbf{f}$; ρ и ε — плотность и диэлектрическая проницаемость кристалла; $\hbar\mathbf{p}$ и m — квазиимпульс и эффективная масса электрона (или дырки);

$$E_p = \hbar^2 p^2/2m; \qquad (3)$$

E_1 — константа потенциала деформации; u — скорость звука.

В случае акустических фононов

$$\overline{N}_{\mathbf{f}} \approx \varkappa T/\hbar\Omega_{\mathbf{f}} \gg 1.$$

Кроме того, энергией фонона можно пренебречь по сравнению с энергией электрона (или дырки) и энергией фотона $\hbar\omega$.

Вероятность (2) следует просуммировать по всем конечным состояниям т. е. проинтегрировать по всем $\mathbf{f}$) и усреднить по всем начальным состояниям при помощи симметричной части функции распределения $n_c(p)$ (антисимметричная часть не дает вклада в эффект). После замены (см. [3])

$$\frac{\varkappa T E_1^2 m^2}{\rho u^2 \pi\hbar^4} = \frac{1}{v_p\tau_p} = \frac{1}{l}, \qquad (4)$$

где v_p и τ_p — скорость носителя тока с импульсом $\hbar\mathbf{p}$ и его время свободного пробега, получаем следующее выражение для спектрального распределения интенсивности излучения в полный телесный угол:

$$\frac{\Pi}{\hbar\omega} = V\frac{4\sqrt{2}ne^2e^{1/2}}{3\pi m^{3/2}c^3 l}(\hbar\omega)^{3/2}\frac{1}{n}\int\limits_{V\sqrt{2m\omega/\hbar}}^{\infty}\frac{2\cdot 4\pi}{(2\pi)^3}dpp^2 n_c(p)\left(\frac{2E_p}{\hbar\omega}-1\right)\left(\frac{E_p}{\hbar\omega}-1\right)^{1/2}. \qquad (5)$$

В формуле (5) n — число носителей в единице объема; c — скорость света.

В том важном частном случае, когда $n_c(p)$ можно аппроксимировать максвелловской функцией с некоторой электронной температурой T_e,

т. е. когда

$$n_c(p) = \frac{n}{2}\left(\frac{2\pi\hbar^2}{m\varkappa T_e}\right)\exp\left(-E_p/\varkappa T_e\right), \tag{6}$$

выражение для $dI/d\omega$ принимает вид

$$\frac{dI}{d\omega} = V\frac{32\sqrt{2}ne^2\varepsilon^{1/2}}{3\pi^{3/2}l}\left(\frac{\bar{v}}{c}\right)^3 A\left(\frac{\hbar\omega}{\varkappa T_e}\right). \tag{7}$$

Здесь

$$\bar{v} = (\varkappa T_e/m)^{1/2}; \tag{7а}$$

$$A(z) = \frac{1}{2}e^{-z}\int_0^\infty dx\, x^{1/2}(x+z)^{1/2}\left(x+\frac{z}{2}\right)e^{-x}. \tag{7б}$$

Функцию $A(z)$ можно выразить через функции Уиттекера.

Электронную температуру T_e как функцию разогревающего поля F можно оценить следующим образом. В работе Б. И. Давыдова [4] применительно к случаю, когда носители тока взаимодействуют лишь с акустическими фононами, получено следующее выражение для T_e/T (при $T_e/T \gg 1$):

$$T_e/T = \frac{1}{2\sqrt{3}}\left(\sqrt{\varkappa T/m}/u\right)(eFl/\varkappa T). \tag{8}$$

Можно оценить T_e и другим способом. В том случае, когда рассеяние носителей тока характеризуется не зависящей от энергии E_p длиной свободного пробега, T_e связана с подвижностью в сильном поле μ_F простой формулой [5]

$$T_e/T = (\mu_0/\mu_F)^2, \tag{9}$$

где μ_0 — подвижность в слабых полях. Для n-Ge при $T = 77°$ K и $F = 6\cdot10^3$ *в/см* ($m \simeq 0{,}2\cdot10^{-27}$ *г*, $u \simeq 5\cdot10^5$ *см/сек*, $l \simeq 5\cdot10^{-5}$ *см*, $\mu_0 \simeq 2\cdot10^4$ *см²/в·сек*, $\mu_F \simeq 1{,}5\cdot10^3$ *см²/в·сек* [6]) получаем как по формуле (8), так и по формуле (9)

$$T_e/T \sim 180.$$

Отсюда можно сделать вывод, что в n-Ge при полях порядка нескольких киловольт на сантиметр (до пробоя) можно получить электронные температуры порядка 10^4 °K.

Вычислим интенсивность теплового излучения горячих электронов в n-Ge при $T_e = 10^4$ °K, $l = 5\cdot10^{-5}$ *см* ($T = 77°$ K), $n = 10^9$ *см*$^{-3}$, $V = 1$ *см*^{3}.

Допустим, что детектор излучения регистрирует спектральную область от $\hbar\omega = 0{,}15$ *эв* до $\hbar\omega = 0{,}30$ *эв* ($\Delta\hbar\omega = 0{,}15$ *эв*) в телесном угле, равном 1/4 от полного. Тогда

$$\Delta I \sim 4\cdot10^{-6}\ вт\ *.$$

Этот результат позволяет сделать вывод, что тепловое излучение горячих электронов доступно для наблюдения на опыте.

Экспериментальное исследование теплового излучения горячих электронов проводимости или дырок может дать сведения об их разогревании в сильном поле, в частности об их эффективной температуре.

Интересной особенностью излучения горячих носителей тока является возможность его модуляции с весьма большими частотами, вплоть до

---

* В этих же условиях на джоулево тепло расходуется мощность порядка ватта

астот $\sim 10^{10}$ *гц*. Действительно, время релаксации $\tau_{рел}$ для «разогревания» «остывания» носителей порядка нескольких или нескольких десятков ремен свободного пробега, а это значит, что $\tau_{рел} \lesssim 10^{-10}$ *сек*.

В заключение автор выражает искреннюю признательность . Л. Бонч-Бруевичу, Т. М. Лифшицу, В. Б. Сандомирскому и . И. Яковлеву за ценное обсуждение работы.

ЛИТЕРАТУРА

Н. И. Фань, Успехи физ. наук, 1958, 64, 2, 315.
J. B. Gunn, Progress in semiconductors, 1957, 2, 211.
Г. Брукс, Проблемы современной физики, 1957, 8, 74.
Б. И. Давыдов, ЖЭТФ, 1937, 7, 9—10, 1069.
Ш. М. Коган, В. Б. Сандомирский, Физика твердого тела, 1960, 2, 10, 2570.
E. J. Ryder, Phys. Rev., 1953, 90, 5, 766.

Поступила в редакцию
21 XII 1960

1961 №

НЕКОТОРЫЕ ВОПРОСЫ ОТРАЖАТЕЛЬНОЙ ЭЛЕКТРОННОЙ МИКРОСКОПИИ *

Г. В. Дер-Шварц, Ю. М. Кушнир, Л. Б. Розенфельд, П. В. Зайцев, С. В. Безлепкин, И. С. Трутнева, С. А. Беленький, Л. А. Титов

Кратко описан отражательный электронный микроскоп, рассчитанный на работу при больших углах наблюдения и получение дифракции «на отражение». Прибор оборудован эффективной осветительной системой, усилителем яркости конечного изображения, камерой деформации и нагрева исследуемого массивного образца. Кратко изложено содержание теоретических работ, проведенных в связи с разработкой прибора.

В свое время Фер и его сотрудники [1] показали, что при наклоне осветительной системы на 15—25° в отражательном микроскопе можно получить вполне пригодное изображение с малым искажением масштаба и большой полезной поверхностью конечного изображения.

Нами разработан отражательный электронный микроскоп такого типа (рис. 1).

Известно [2], что количество электронов, рассеянных от объекта в направлении углов 15—25° по отношению к поверхности объекта и при очень малых углах облучения, чрезвычайно мало. В связи с этим отражательный микроскоп, работающий с углами наблюдения 15—25°, характеризуется малой яркостью конечного изображения. Известно [3], что если ахроматизировать отражательный микроскоп в отношении полевых хроматических аберраций и соблюдать определенные допуски на юстировку апертурной диафрагмы, то его разрешение практически ограничивается только хроматической аберрацией положения и дифракцией. Хроматическую аберрацию положения можно снизить, ограничивая отверстие апертурной диафрагмы объектива. Это ограничение размера апертурной диафрагмы ведет также к сильному уменьшению яркости конечного изображения. Поэтому перед нами стояла задача увеличить яркость конечного изображения для установки на резкость. Увеличение яркости конечного изображения обеспечивается в данном приборе двумя путями. Во-первых, разработана более эффективная электронная пушка и, во-вторых, используется усилитель яркости.

Если в просвечивающем микроскопе апертурная диафрагма играет в большинстве случаев роль контрастной диафрагмы, то в отражательном микроскопе апертурная диафрагма оправдывает свое название полностью.

Таким образом, разрешение отражательного микроскопа определяется размером диафрагмы объектива, потому что характеристика отраженного от поверхности объекта излучения весьма диффузна. Поэтому эффективность электронной пушки в отражательном микроскопе должна оцениваться не электронной яркостью (подобно тому, как оцениваются пушки для просвечивающего микроскопа), а плотностью тока на объекте.

---

* Доложено на 3-м Всесоюзном совещании по электроной микроскопии, Ленинград, октябрь 1960 г.

До настоящего времени все электронные пушки для микроскопов разрабатывались так, чтобы обеспечить наибольшую электронную яркость при минимальной нагрузке на объект. Не удивительно, что нам удалось обнаружить, что трехэлектродные пушки особого вида способны обеспечить гораздо бóльшую плотность тока на объекте, чем стандартные пушки, применяемые в универсальных микроскопах. В отличие от обычных пушек разработанная нами конструкция имеет конический фокусирующий электрод. Мы исследовали пушки с коническими электродами с углом α у вершины 60, 90, 120° (рис. 2). Исследование заключалось в снятии зависимости плотности тока j в наименьшем сечении (кроссовере) от анодного тока I_a. Параметром являлась «глубина погружения» h кончика нити катода (диаметр нити равен 0,12 *мм*) по отношению к началу конического раструба фокусирующего электрода. Величина смещения устанавливалась так, чтобы получить максимальную плотность тока в данных условиях (U =60 *кв*, температура катода 2800° К).

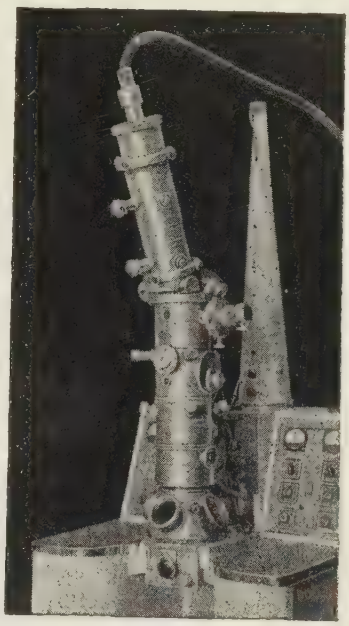


Рис. 1. Общий вид прибора

Кривые рис. 3 показывают оптимальные результаты, достигнутые в ходе этих опытов. Для электрода с углом α, равным 120°, h = 0,5 *мм*; для α =90 и 60° h=1,5*мм*. Для сравнения на рис. 3 представлена также кривая $j = f(I_a)$ для обычной пушки УЭМ-100, в которой кончик нити расположен на 0,75 *мм* выше торца фокусирующего электрода. Согласно экспериментам Хайне и Эйнштейна [4] такое положение кончика катода близко к оптимальному для пушек обычного типа.

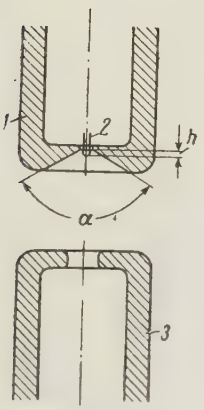


Рис. 2

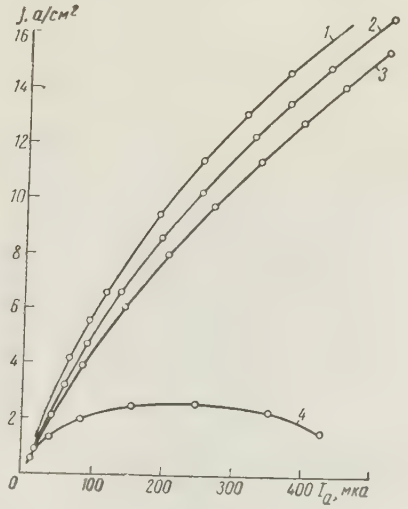


Рис. 3

Рис. 2. Электронная пушка с коническим электродом:
1 — фокусирующий электрод; *2* — катод; *3* — анод

Рис. 3. Оптимальные кривые зависимости плотности тока j в наименьшем сечении пучка от анодного тока I_a для конических электродов с углами раскрытия α:
1 — h= 0,5 *мм*, α = 120°; *2* — h = 1,5 *мм*, α = 90°; *3* — h = 1,5 *мм*, α = 60°; *4* — h = — 0,75 *мм*

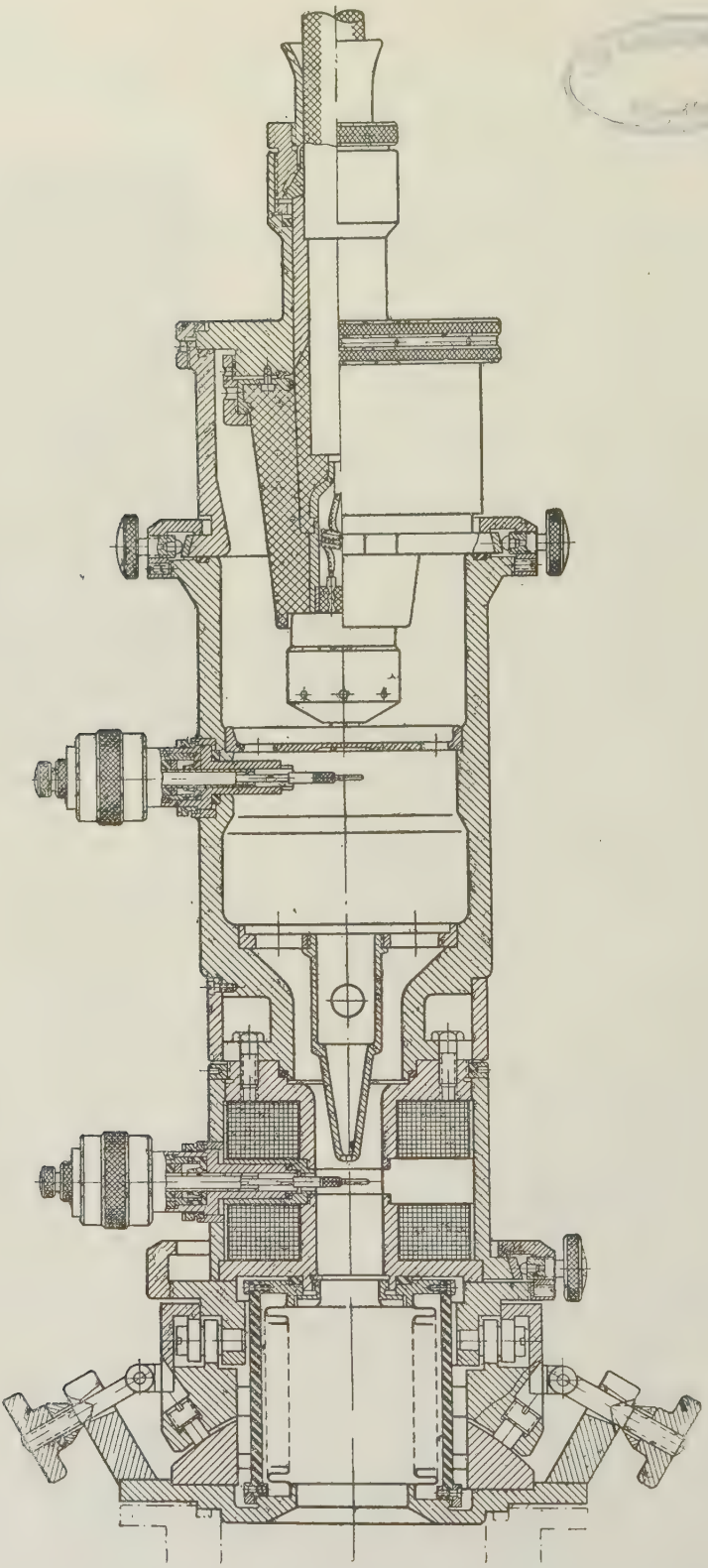


Рис. 4. Осветительная система отражательного электронного микроскопа

Как видно из кривых, выигрыш в плотности тока составляет для пушки с $\alpha = 120°$ примерно 4,6 раза при токе 250 *мка* и 7 раз при токе 500 *мка*. Именно такие токи и характерны для работы на отражение.

Разработанная нами конструкция пушки смонтирована в осветительной системе микроскопа, показанной на рис. 4. Она имеет бро-

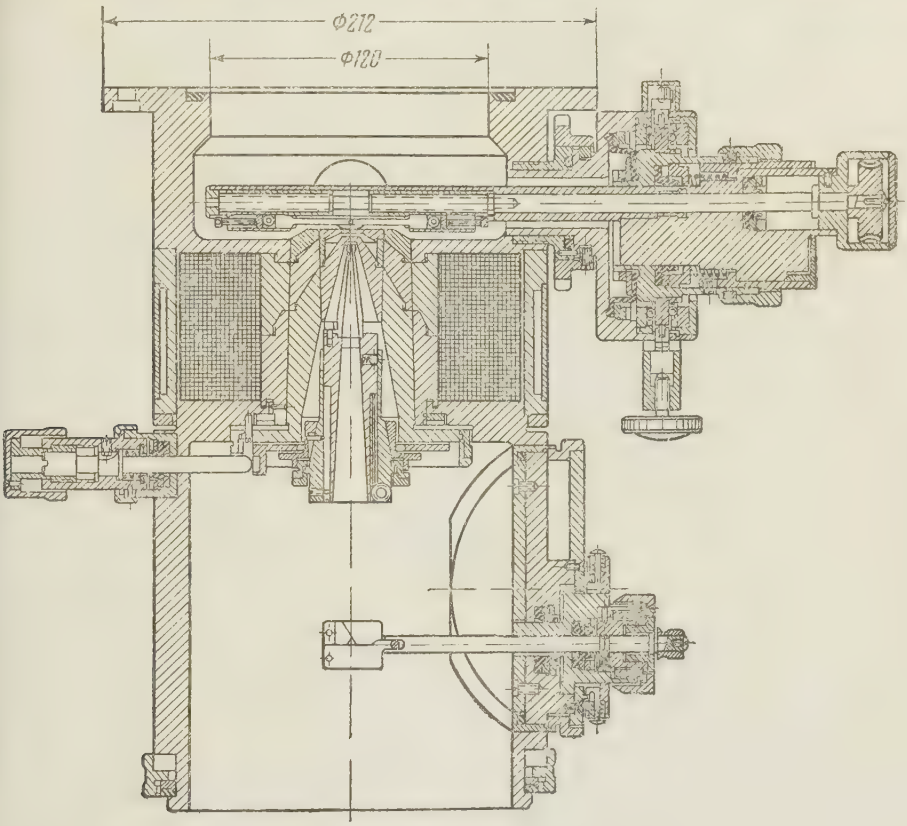


Рис. 5. Разрез объектива отражательного электронного микроскопа

нированный ввод и может механически наклоняться на любой угол в пределах от 0 до 22°. Этот наклон фиксируется по нониусу.

На рис. 5 показан разрез объектива. Он отличается тем, что полюсный наконечник вынесен в камеру объекта. Таким образом, можно совершать различные манипуляции над объектом в ходе наблюдения. Столик объекта сконструирован таким образом, чтобы в нем можно было деформировать металлические объекты растяжением. Растяжению подвергается стандартный образец гантелеобразной формы с концентратором напряжения посредине. В столике можно разрушить образец шириной 3 *мм* и толщиной 1,5—1 *мм*. Концентратор напряжения имеет форму цилиндрического отверстия диаметром 1 *мм*. Этот же столик имеет держатель для объекта обычного размера 10×10 *мм*^{2} и толщиной до 3 *мм* (рис. 6). Такой образец может нагреваться в ходе наблюдения особой пушкой, схематический чертеж которой показан на рис. 7.

Усилитель яркости смонтирован в микроскопе по схеме, представленной на рис. 8. Основное его назначение — визуальное наблюдение экрана в ходе установки на резкость объективной линзы. Сходный, чисто электростатический вариант усилителя яркости описан Завойским, Бутеловым, Плаховым, Смолкиным [5] и использован для усиления яркости конечного изображения в электронном микроскопе [6]. Усилитель

установлен под фотокамерой микроскопа. Фотомагазин камеры микроскопа убирается из хода лучей под вакуумом. Тогда пучки, формирующие изображение, падают на алюминированный экран синего свечения. Созданное на этом экране изображение переносится стандартной светосиль-

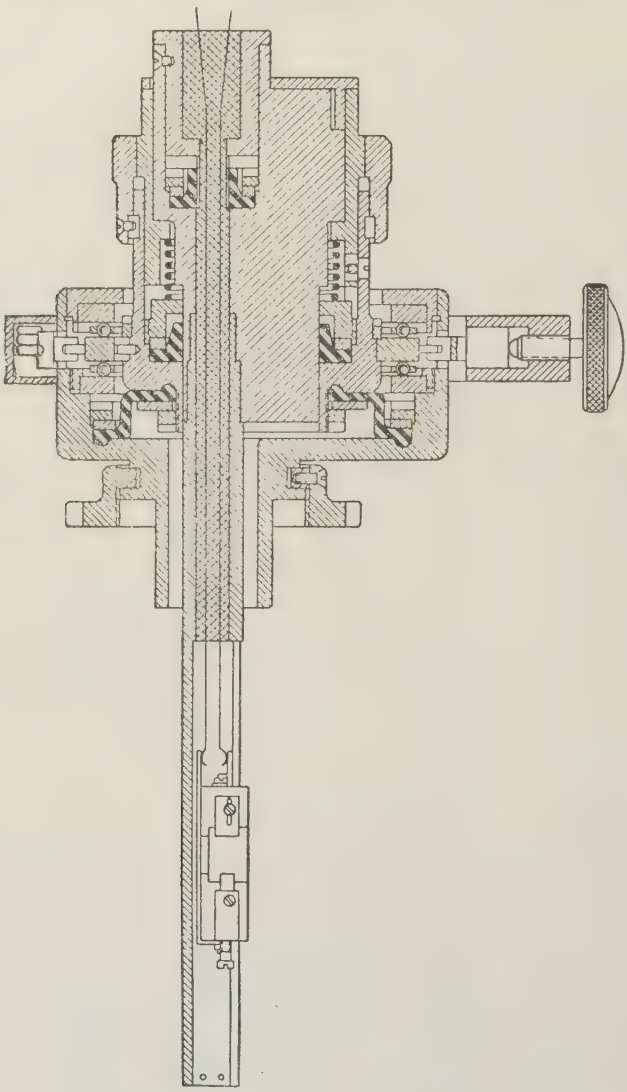


Рис. 6. Столик объекта отражательного электронного микроскопа

ной фотографической оптикой, снабженной специальным покрытием, на фотокатод усилителя. Изображение на экране усилителя наблюдается сквозь окуляр.

Микроскоп приспособлен для проведения дифракционных исследований на отражение.

В ходе предварительного исследования прибора нами были получены снимки, показанные на рис. 9 и 10. На рис. 9 представлен снимок с поверхности стали «серебрянка», обработанной для получения структуры пластинчатого перлита. На рис. 10 показан снимок с поверхности белого чугуна.

Электронно-оптическое увеличение равно 2500 раз, разрешение около 500 Å.

Параллельно разработке прибора проводилось теоретическое исследование влияния дефектов сборки и формы полюсных наконечников на раз-

ешение. Ввиду того что изображение отражательного микроскопа фор-ируется в электронах, претерпевших значительные потери в скорости, о несоосности каналов полюсных башмаков и угловые погрешности в их сборке вызывают в приосевой области появление постоянного поля, ерпендикулярного оси объектива. Это поле имеет анализирующее дей-твие и способно вызвать специфические хроматические аберрации. Вы-исление аберраций, вызванных дефектами сборки и формы линз, требует предварительного определения соответствую-их возмущающих потенциалов. Эти возму-щающие потенциалы обычно вычисляются по методу, предложенному Бертеном [7]. Для не-которых задач этот метод находит свое мате-матическое оправдание в понятии аналитичес-кого продолжения. В том виде, в котором он сформулирован Бертеном, метод носит универ-альный характер, и им пользовались Стеррок [8], Арчард [9], Глазер и Шиске [10] для оп-ределения допусков на изготовление магнит-ных линз. Однако можно показать, что этот метод не дает точных граничных значений для

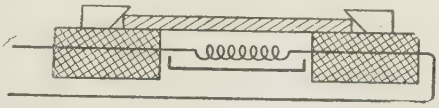


Рис. 7

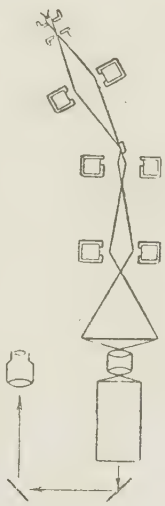


Рис. 8

Рис. 7. Схема электронной пушки для нагрева объекта

Рис. 8. Схема усилителя яркости конечного изображения

ешения уравнения Лапласа для возмущающих потенциалов, например для случая симметричного эллиптического возмущения границ каналов полюсных башмаков.

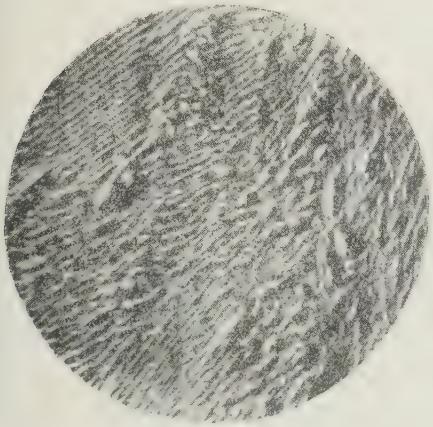


Рис. 9. Пластинчатый перлит; увеличение 2500 раз

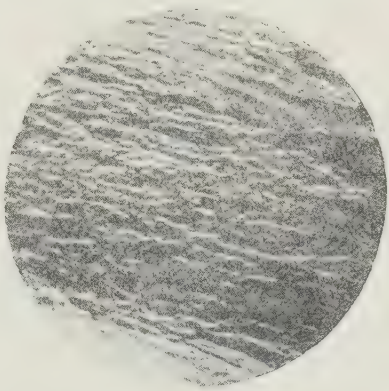


Рис. 10. Белый чугун; увеличение 2500 раз

Последнюю задачу удается решить точно лишь в предположении, что возмущение сколь угодно мало. Модифицированные функции Матье можно свести к суммам функций Бесселя, отдельные члены которых умно-

жены на параметр уравнения Матье [11]. Основные функции Матье сводятся к суммам тригонометрических функций, отдельные члены которых также умножены на этот параметр. В последнем содержится линейное отклонение полуосей эллипса от круга. Тогда можно вычислить значение модифицированных функций Матье на границе вписанного в эллипс круга и, таким образом, показать, что потенциал на этом круге не совпадает с граничным возмущающим потенциалом, вычисленным по методу Бертена.

В исследованиях мы пришли к выводу, что невозможно указать общий способ для вычисления возмущающих потенциалов и воспользовались для их определения в приосевой области интегралом простого слоя. Идя на дальнейшие допущения, которые снижают точность, мы находили возмущающие потенциалы, соответствующие несимметричным возмущениям границ. Не имея возможности в рамках статьи остановиться на результатах этой работы, отметим, что допуски на сдвиг башмаков имеют порядок 5—10 *мкм* для наконечников с геометрическим параметром формы $s/d = 1{,}5$. Эти наконечники используются нами в приборе. Угловые неточности сборки сказываются меньше, что объясняется известной компенсацией возмущающих потенциалов, наведенных противостоящими торцами башмаков. Бёрш [12] указал, что хроматические аберрации всех видов можно существенно уменьшить, применяя электронные фильтры.

Мы провели исследование линз фильтров, предполагая повысить разрешение отражательного микроскопа. Расчеты основывались на математических моделях одиночных электростатических линз Глазера и Шиске [13] и Рюденберга [14]. Траектории в полях этих линз могут быть выражены аналитически, даже в непараксиальном приближении, что значительно облегчает анализ работы подобных линз-фильтров. Исследования показали, что разрешение линз в основном лимитируется тем, что внеосевые пучки немонохроматических электронов фокусируются в разных плоскостях. При разбросах энергии электронов порядка 5—6 *эв* на экране возникает фон, в котором гибнет изображение, формируемое приосевыми зонами поля.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ch. Fert, B. Marty, R. Saporte, C. r. Acad. sci., 1955, 240, 20, 1975.
2. J. M. Kuschnier, R. W. Der-Schwarz, Verh. des vierten Internat. Kongress für Elektronenmikroskopie, Berlin, 10—17 sept. 1958, s. 122.
3. Г. В. Дер-Шварц, Ю. М. Кушнир, Радиотехника и электроника, 1959, 4, 6, 1002; Г. В. Дер-Шварц, Радиотехника и электроника, 1958, 3, 10, 1315.
4. M. E. Haine, P. A. Einstein, Brit. J. Appl. Phys., 1952, **3**, 2, 40.
5. Е. К. Завойский, М. М. Бутслов, А. Г. Плахов, Г. Е. Смолкин, Атомная энергия, 1956, **1**, 4, 34.
6. Ю. М. Кушнир, В. Г. Ныряков, М. М. Бутслов, Г. А. Бордовский, Приборы и техника эксперимента, 1958, 3, 73.
7. F. Bertein, Ann. radioélectr., 1947, 2, 7, 379.
8. P. A. Sturrock, Philos. Trans. Roy. Soc. London A, 1951, **243**, 868, 387.
9. G. D. Archard, J. Scient. Instrum., 1953, **30**, 10, 353.
10. W. Glaser, P. Schiske, Z. angew. Phys., 1953, 5, 9, 329.
11. Н. Б. Мак-Лахлан, Теория и приложения функций Матье, ИЛ, 1953.
12. H. Börsch, Optik, 1949, 5, 7, 436.
13. W. Glaser, P. Schiske, Optik, 1954, **11**, 9, 422; 1954, **11**, 10, 455; 1955, 12, 5, 233.
14. R. Rüdenberg, J. Franklin Inst., 1948, **246**, 4, 311; **246**, 5, 377.

Поступила в редакцию
7 II 1961

СВЕТОЭЛЕКТРОННЫЙ МИКРОСКОП ЭМ-6 *

В. Н. Верцнер, В. Г. Никифорова, Г. А. Богдановский, В. В. Козелкин, Ю. Ф. Щетнев

Сочетание электромагнитного объектива, монокристаллического экрана высокой добротности и светового микроскопа осуществлено в упрощенном, оригинальном серийном электронном микроскопе ЭМ-6, названном «светоэлектронным» микроскопом. Полученное на монокристаллическом экране электронное изображение рассматривается через светооптический микроскоп и может быть сфотографировано при помощи насадки, использующей фотокамеру «Зенит С». Разрешающая способность микроскопа лучше 100 Å. Ускоряющее напряжение 35 *кв*.

Разрешающая способность лучших электронных микроскопов превосходит разрешение светооптических приборов примерно в 200 раз. Отсюда появляется возможность использования электронной оптики с таким же увеличением для доведения размеров разрешаемых объектов только до размеров, доступных наблюдению в световой микроскопии.

Для реализации разрешения, полученного при помощи электронно-оптического объектива, необходимо, конечно, иметь промежуточный экран с высокой разрешающей способностью. Разработка таких экранов была проведена В. В. Купревичем [1]. Кристаллы, полученные им на основе флуорита при размерах, намного превосходящих размеры природных кристаллов ZnS, применявшихся в свое время М. Арденне [2], обладают высокой однородностью, прозрачностью, а спектральный состав их свечения близок к области чувствительности глаза. Светоотдача этих кристаллов мало отличается от светового выхода поликристаллических фосфоров (25—30% от светоотдачи поликристаллических экранов). Разрешающая способность экранов при напряжении 35 *кв* равна примерно 650—1000 *штр/мм*. Однако постройка такого прибора с разрешением в 10 Å оказывается очень сложной задачей, так как его электронно-оптический объектив должен по своему качеству не уступать объективам приборов первого класса; такими же первоклассными должны быть и электрическая схема прибора и его механизмы. К тому же пока еще не имеется кристаллов столь высокого разрешения (2500 *штр/мм*). Поэтому было естественно начать с постройки основанного на этом принципе, предложенном В. Н. Верцнером, простого прибора, разрешение которого по своей величине является промежуточным между разрешением светового и электронного микроскопов. На 2-м совещании по электронной микроскопии было сделано предварительное сообщение о возможности постройки подобного микроскопа [3], названного нами светоэлектронным микроскопом.

Светоэлектронный микроскоп ЭМ-6 (рис. 1) представляет собой прибор с электромагнитным объективом, позволяющим получать в проходящих электронных лучах на монокристаллическом экране высокого разрешения увеличенное электронное изображение объектов, рассматриваемое в световой микроскоп небольшого увеличения и фотографируемое при помощи фотонасадки, использующей фотокамеру «Зенит С.»

---

* Доложено на 3-м Всесоюзном совещании по электронной микроскопии, Ленинград, октябрь 1960 г.

Источником электронов микроскопа ЭМ-6 является длиннофокусная пушка *1* (рис. 2). Нить катода питается от сети переменного тока через трансформатор, расположенный в высоковольтном масляном баке. Диафрагма анода имеет отверстие ϕ 1 *мм*. При помощи юстировочного устройства можно центрировать нить вместе с модулирующим электродом (цилиндром Венельта) относительно анода и тем самым направлять пучок по оптической оси прибора.

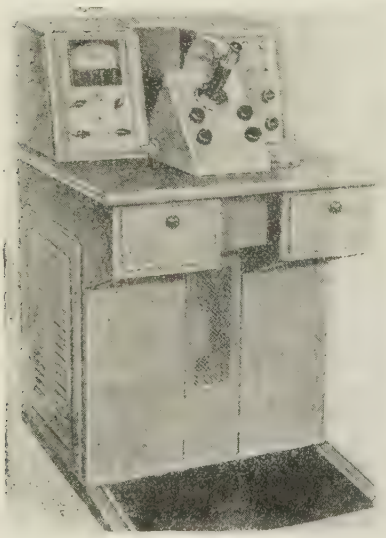


Рис. 1. Светоэлектронный микроскоп ЭМ-6

Непосредственно за анодом находится центрируемая конденсорная диафрагма *2*. Механизм диафрагмы позволяет без нарушения вакуума устанавливать последовательно три различных диафрагмы и смещать их для центрировки в двух взаимоперпендикулярных направлениях.

Осветительная система микроскопа обеспечивает получение без конденсорной линзы узкого пучка электронов, падающих на объект (~100 *мк*).

Следует отметить, что использование светового микроскопа для последующего увеличения изображения имеет своим следствием снижение нагрузки объекте примерно на три порядка по сравнению а электронным микроскопом равного конечного увеличения.

Образцы вводятся в прибор через шлюз *3*. Объект, находящийся в цилиндрическом стержне, устанавливается в зазоре полюсных наконечников объективной линзы. Стержень уплотняется с двух сторон резиновыми торами и составляется из двух свинчивающихся частей. В рабочем положении части стержня развинчены и пучок электронов проходит свободно через объект. Для смены объекта стержень свинчивается так, что объект оказывается во внутренней полости стержня и таким путем защищается от загрязнения при протаскивании его через уплотняющие торы на воздух, где стержень снова развинчивается и часть стержня с объектом отъединяется от прибора.

Апертурная диафрагма объектива *4* также вводится в зазор между полюсными наконечниками объективной линзы и располагается за объектом. Механизм ее аналогичен механизму конденсорной диафрагмы.

Минуя объект после первой объективной линзы, пучок электронов попадает во вторую объективную линзу *5*, увеличение которой можно изменять тремя ступенями.

Конечное электронное изображение образуется на монокристаллическом экране *6*. Со стороны, обращенной к пучку, экран и латунная оправка покрыты тонким слоем алюминия, чем исключается подзарядка экрана. Экран имеет сравнительно небольшую толщину (0,4 *мм*), что вполне достаточно благодаря высокой прочности флуорита. Так как изображение, полученное на внутренней поверхности кристалла, рассматривается в световой микроскоп, находящийся снаружи, то чем тоньше экран, тем меньше вносимые им искажения.

Световой микроскоп *7* крепится на кожухе прибора и может откидываться вверх на шарнире, освобождая доступ к экрану.

При фотографировании на окуляре светового микроскопа укрепляют фотокамеру «Зенит С» (без объектива), которая дает возможность как контролировать наводку на резкость, так и фотографировать электронное изображение на монокристаллическом экране. Число снимков при одной зарядке пленки — 36. Наиболее удобным фотоматериалом для фотографи-

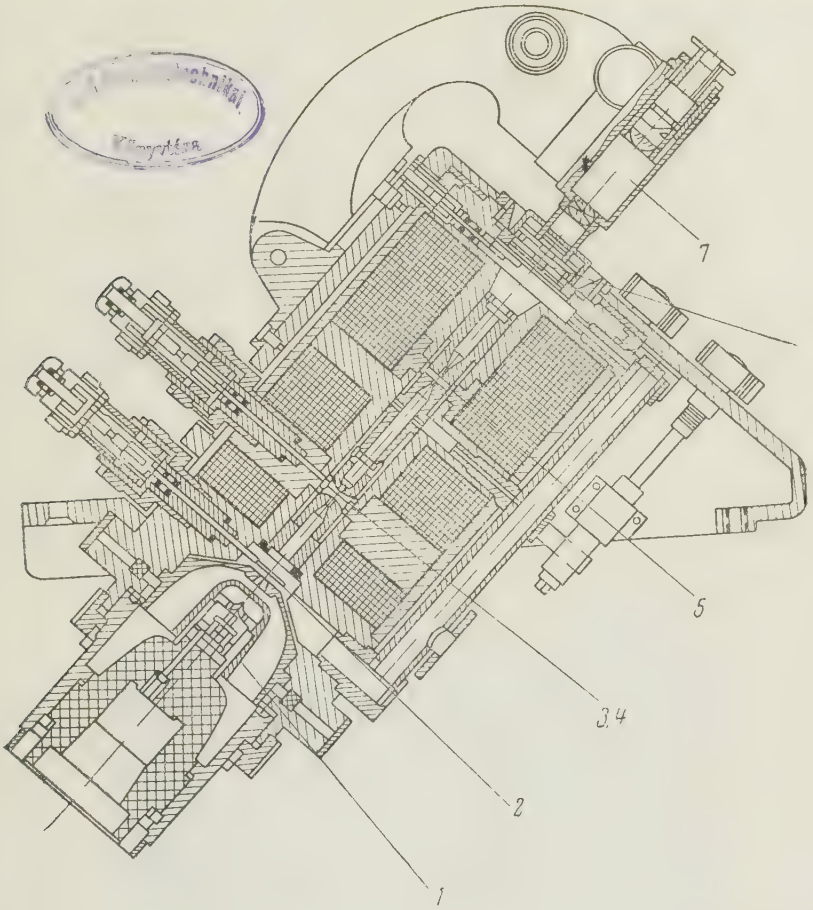


Рис. 2. Разрез колонны микроскопа ЭМ-6

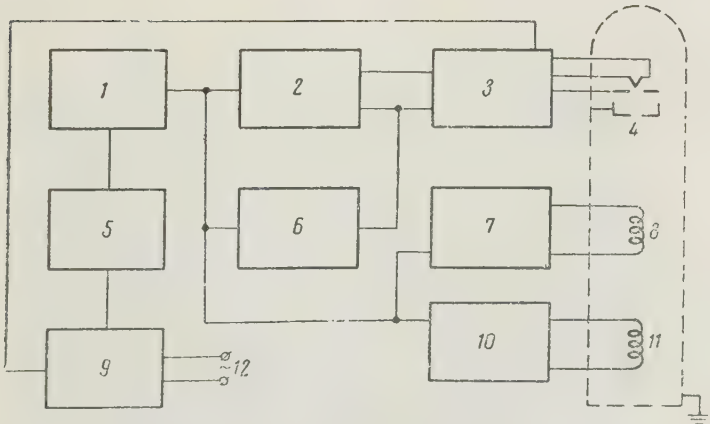


Рис. 3. Схема электрического питания микроскопа ЭМ-6:

1 — электронный стабилизатор; *2* — генератор ВЧ-накала кенотронов; *3* — выпрямитель-умножитель; *4* — электронная пушка; *5* — выпрямитель, *6* — генератор колебаний высокой частоты; *7* — электронный стабилизатор, *8* — 1-я объективная линза; *9* — феррорезонансный стабилизатор; *10* — электронный стабилизатор; *11* — 2-я объективная линза; *12* — сеть

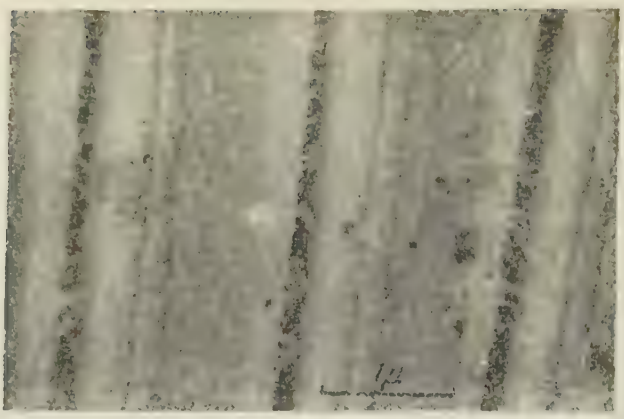


Рис. 4. Дифракционная решетка 600 *штр/мм*

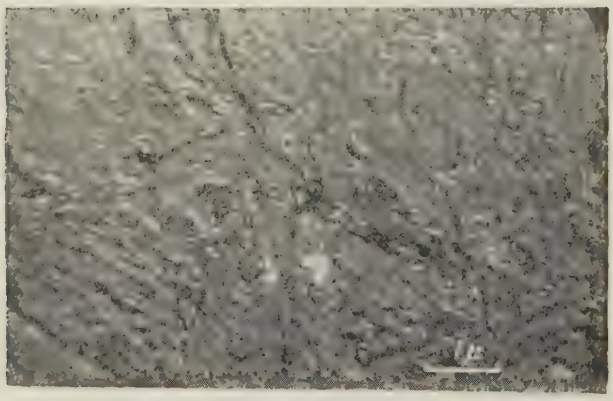


Рис. 5. Структура поверхности стали: увеличение 10 000 раз

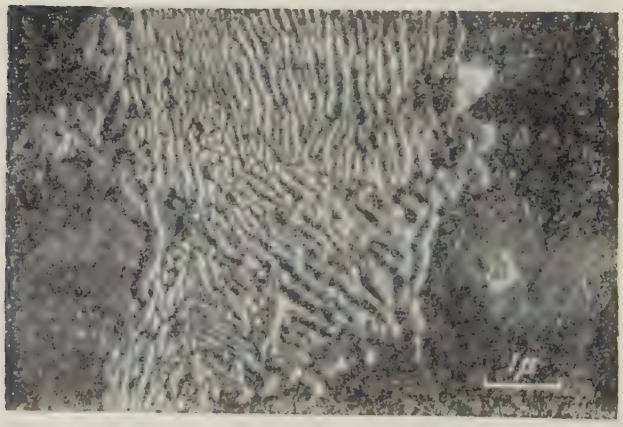


Рис. 6. Структура поверхности перлита; увеличение 10 000 раз

рования на приборе ЭМ-6 является флуорографическая пленка РФ-3, но можно также применять с успехом и другие пленки с чувствительностью 180—250 единиц ГОСТа, например пленку типа А-2.

Экспозиции изменяются от 2 до 25 *сек* в зависимости от плотности образца и величины используемого суммарного увеличения. Последнее при увеличении светового микроскопа в 40 раз составляет 10 000, 5000 и 2000 раз.

Юстировка прибора сводится к направлению электронов по оптической оси объектива, что достигается изменением наклона пушки и установкой на оси двух диафрагм.

Вакуумная система микроскопа состоит из распределителя, малого ротационного насоса ВН-494, находящегося внутри стола микроскопа, и диффузионного насоса НВО-40 с воздушным охлаждением. Используемое в диффузионном насосе силиконовое масло типа ВКЖ-94 не окисляется при соприкосновении в разогретом состоянии с воздухом.

В стол прибора вмонтирована примитивная вакуумная приставка, которая служит для оттенения объектов.

Прибор питается от сети переменного тока с напряжением 220 *в* через феррорезонансный стабилизатор напряжения (рис. 3). Для получения ускоряющего напряжения используется высокочастотная схема. Генератор колебаний высокой частоты на лампе ГУ-50 позволяет получить напряжение с частотой 60 *кгц* и амплитудой 8—9 *кв*. Это напряжение поступает на выпрямитель-умножитель, на выходе которого напряжение достигает 35 *кв*. В приборе на модулирующем электроде предусмотрена регулировка величины напряжения смещения. Линзы микроскопа питаются выпрямленным и стабилизированным напряжением.

Электрическая схема прибора позволяет получить устойчивое изображение хорошего качества.

Светоэлектронный микроскоп ЭМ-6 выпускается сейчас с разрешающей способностью, реализуемой на снимках, в 150 Å; при визуальном наблюдении она равна 80—100 Å. При хорошем изготовлении полюсных наконечников разрешение прибора может быть повышено до 60Å, реализуемых на фотоснимках. Дальнейшего повышения разрешения можно достигнуть стигмированием объективной линзы при помощи простейшего стигматора, так как кольца Френеля хорошо видны в световой микроскоп.

Качество работы прибора иллюстрируют фотоснимки, приведенные на рис. 4, 5, 6.

Можно надеяться, что простота конструкции и несложность эксплуатации обеспечат светоэлектронному микроскопу широкое применение при проведении исследований в том важном диапазоне увеличений, который находится на стыке между увеличениями светооптического и электронного микроскопов.

ЛИТЕРАТУРА

1. В. В. Купревич, Инженерно-физ. ж., 1958, 11, 130.
2. M. F. Ardenne, Elektronenübermikroscopie, Berlin, I. Springer, 1940.
3. Г. А. Богдановский, В. В. Купревич, В. Н. Верцнер, И. В. Степанов, Изв. АН СССР, Сер. физ., 1959, 23, 478.

Поступила в редакцию
7 II 1961

РАДИОТЕХНИКА И ЭЛЕКТРОНИКА

1961 № 8

ЭЛЕКТРОННО-МИКРОСКОПИЧЕСКИЕ ИССЛЕДОВАНИЯ ПОВЕРХНОСТИ ГЕРМАНИЯ *

Р. Я. Берлага, П. П. Коноров, М. И. Руденок

Проведены электронно-микроскопические исследования поверхности германия, обработанного стандартными травителями H_2O_2 и СР-4, а также специальным травителем, сводящим к минимуму образование моноокиси и растворяющим двуокись германия, и травителем, применяемым для создания однородной пленки моноокиси на германии. Изучено также влияние на структуру поверхности германия HF и HNO_3, входящих в состав травителя СР-4. Параллельно проводились измерения длины диффузионного смещения носителей тока; полученные данные сопоставлены со структурой поверхности.

Скорость поверхностной рекомбинации и связанная с ней длина диффузионного смещения носителей тока в германии являются одними из основных параметров, определяющих работу различных германиевых приборов (транзисторов, фотодиодов и т. д.). Эти параметры сильно зависят от характера обработки поверхности германия и изменяются как в результате механической обработки поверхности (шлифовка, полировка и т. д.), так и в результате воздействия на поверхность различных химических травителей. Можно предполагать, что это связано либо с изменениями поверхностных состояний, обусловленных дефектами структурного характера, вызванных механической обработкой, либо с появлением в результате химических воздействий на поверхности германия пленок, главным образом оксидных, различных по составу, толщине и степени однородности.

В настоящее время отсутствует четко выраженная связь между изменениями длины диффузионного смещения, скорости поверхностной рекомбинации носителей тока и изменениями состояния поверхности, что ограничивает возможности сознательного управления свойствами поверхности; подбор же травителей, придающих поверхности заданные свойства, носит в значительной мере эмпирический характер.

В описываемой работе поверхность германия обрабатывалась различными травителями и исследовалась при помощи электронного микроскопа. Параллельно проводились измерения длины диффузионного смещения носителей тока и была сделана попытка установить связь поверхностной структуры германия с длиной диффузионного смещения.

В качестве объектов исследования использовались монокристаллические образцы германия *n*- и *p*-типов с удельным сопротивлением порядка нескольких *ом·см*, вырезанные по плоскости (111). Электронно-микроскопические исследования проводились при помощи метода угольных реплик на микроскопе ЭМ-3 при увеличении 5500 раз. Для измерения длины диффузионного смещения использовался метод светового зонда, в котором носители тока инъецировались при помощи световой полоски, а длина их диффузионного смещения измерялась по спаду сигнала на коллекторе по мере его удаления от световой полоски.

В работе использовались три наиболее употребительных способа обработки поверхности германия: механическая шлифовка наждачным порошком, травление в 30%-й H_2O_2 и травление в стандартном травител

* Доложено на 3-м Всесоюзном совещании по электронной микроскопии, Ленинград, октябрь 1960 г.

CP-4 (50 *см*³ HNO_3, 30 *см*³ CH_3COOH, 30 *см*³ HF и 0,6 *см*³ Br). На рис. 1 и 2 представлены электронно-микроскопические снимки поверхности, подвергнутой механической шлифовке и травлению в травителе CP-4. Соответствующие значения длины диффузионного смещения равнялись 0,08—0,1 и 0,3 *мм*.

При травлении в перекиси водорода получены различные структуры поверхности в зависимости от того, производилось ли травление в H_2O_2 непосредственно после шлифовки или же после травления в CP-4. В пер-

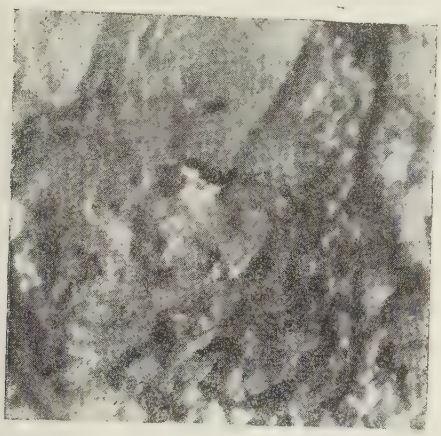


Рис. 1. Микрофотография поверхности германия после механической шлифовки

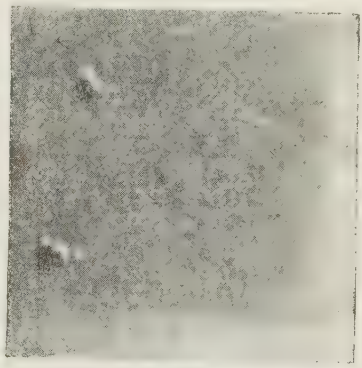


Рис. 2. Микрофотография поверхности германия после травления в CP-4

вом случае наблюдается хорошо развитый рельеф с правильной кристаллической огранкой (рис. 3), а во втором — внешний вид поверхности не отличается от поверхности, полученной непосредственно после травления в CP-4. Из соответствующих измерений длины диффузионного смещения следует, что после травления в H_2O_2 она составляет 0,22 *мм* и не зависит от того, какой предшествующей этому травлению обработке (травление в CP-4 или шлифовка) подвергалась поверхность. Таким образом, упорядоченный рельеф не снижает длины диффузионного смещения по отношению к гладкой поверхности, тогда как неупорядоченный, полученный непосредственно после шлифовки, значительно снижает ее величину.

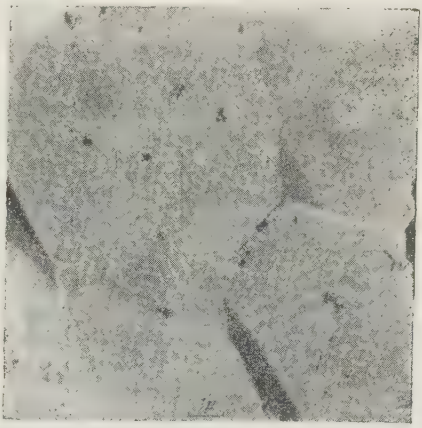


Рис. 3. Микрофотография поверхности германия, травленного в 30%-ной H_2O_2 после шлифовки

Существенный интерес представляет изучение действия на поверхность германия отдельных составляющих, входящих в состав сложных травителей. Предполагается, что при травлении в CP-4, в состав которого входят HNO_3 и HF, поверхность германия окисляется HNO_3 и образующаяся окисная пленка растворяется в HF. Однако до настоящего времени отсутствуют надежные данные о характере и структуре этой пленки. Нами исследовано действие HNO_3 и HF на поверхность германия. Перед обработкой в HF германий либо шлифовался, либо протравливался в CP-4. В ре-

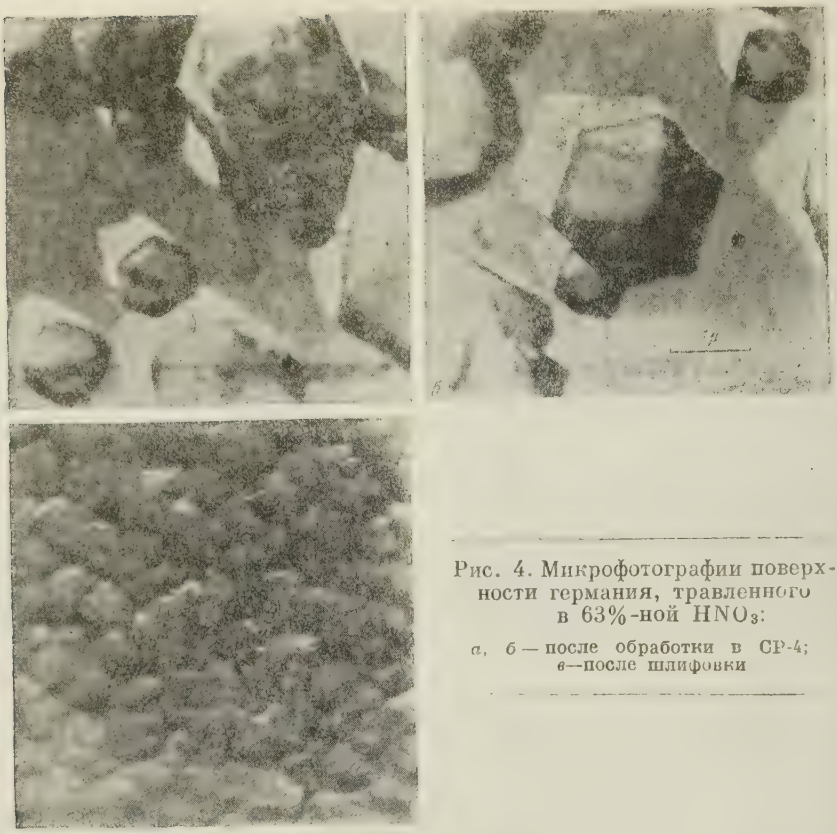


Рис. 4. Микрофотографии поверхности германия, травленного в 63%-ной HNO_3:

а, *б* — после обработки в СР-4; *в* — после шлифовки

зультате воздействия HF в обоих случаях как структура поверхности, так и длина диффузионного смещения сохранялись. Это подтверждает, что HF взаимодействует не с германием, а только с его окислом.

На рис. 4,*а* и 4,*б* представлены микрофотографии поверхности германия, протравленной в 63%-й HNO_3 в течение 20 *мин* после предварительного травления в СР-4. Как видно из микрофотографий, поверхность германия при этом получается неоднородной. На гладкой поверхности, полученной после предварительной обработки в СР-4, появляются отдельные островки, состоящие из зерен, имеющих явно выраженную форму шестигранных пирамид. Это дает основание предполагать, что поверхность германия после обработки в HNO_3 покрывается неоднородной пленкой окисла,

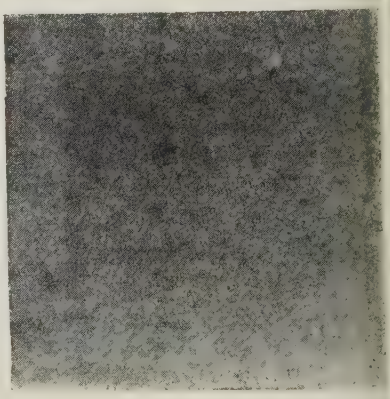


Рис. 5. Микрофотография поверхности германия после травления в травителе № 5

который, судя по виду образующихся пирамид, можно отождествить с гексагональной модификацией двуокиси германия. Можно думать, что неоднородность оксидной пленки возникает из-за того, что ее образование происходит более интенсивно в местах нарушений поверхности. В пользу

этого предположения свидетельствуют микрофотографии германия, предварительно шлифованного, а затем обработанного в HNO_3, из которых видно, что поверхность германия покрыта в этом случае сплошной рыхлой пленкой (рис. 4,*в*).

Измерения длины диффузионного смещения носителей тока на германии, предварительно протравленном в СР-4, а затем обработанном в HNO_3, дали большой разброс значений от 0,07 до 0,2 *мм*, что также подтверждает неоднородную структуру поверхности. Снижение длины диффузионного смещения по сравнению со значениями, характерными для поверхности, обработанной в СР-4, следует объяснить образованием на поверхности оксидной пленки или неоднородностью поверхности, вызванной образованием такой пленки.

В заключение приведем результаты предварительных исследований поверхности германия, травленного после обработки в СР-4 в специальных травителях — травителе № 8 (20 *см*^{3} HNO_3 и 10 *см*^{3} HF), сводящем к минимуму образование моноокиси и растворяющем двуокись, и в травителе № 5 (40 *см*^{3} HF, 6 *см*^{3} H_2O_2 и 24 *см*^{3} H_2O), применяемым для создания на германии однородной пленки моноокиси. В первом случае структура и значения диффузионной длины носителей тока мало отличаются от того, что имелось на исходной поверхности, полученной в результате травления в СР-4. Во втором случае, после травления в травителе № 5, на поверхности образуется более или менее однородная пленка (рис. 5). При этом длина диффузионного смещения возрастает до 0,5—0,7 *мм*. Следовательно, образование однородной оксидной пленки на поверхности германия (по крайней мере пленки моноокиси) может приводить к значительному увеличению длины диффузионного смещения носителей тока и можно предположить, что в случае оксидных покрытий уменьшение длины диффузионного смещения существенно связано с нарушением однородности этих покрытий.

Поступила в редакцию
7 II 1961

1961 № 8

РАСЧЕТ ХАРАКТЕРИСТИК РАССЕЯНИЯ ЭЛЕКТРОНОВ СРЕДНИХ ЭНЕРГИЙ НА СВОБОДНЫХ АТОМАХ*

А. Н. Пилянкевич

Излагаются результаты теоретического расчета эффективных сечений упругого и неупругого рассеяния электронов, определяющего контраст изображения в электронном микроскопе.

Обсуждается зависимость атомных сечений от атомного номера. Полученные данные сравниваются с результатами экспериментов Холла.

ВВЕДЕНИЕ

Для определения физических свойств объекта, наблюдаемого в электронном микроскопе по контрасту его изображения, необходимо установить количественные связи между этими свойствами и контрастом, учитывая при этом такие конструктивные параметры микроскопа, как ускоряющее напряжение, апертуры осветителя и объектива и пр. Установить такие связи можно двумя путями: экспериментальным, калибруя контраст получаемых изображений по заранее известным свойствам объектов, или же теоретически. Первый путь весьма сложен, так как количество факторов, влияющих на контраст, велико. Поэтому более целесообразен второй путь — теоретический, причем полученные с его помощью результаты корректировкой по опытным данным должны быть освобождены от неточностей, вызванных принятыми допущениями и приближениями.

Поскольку основным процессом, имеющим место при взаимодействии электронов пучка с веществом объекта в электронном микроскопе, является рассеяние, цель настоящей работы — теоретический расчет эффективных сечений рассеяния σ. При этом нас главным образом интересовали сечения, характеризующие вероятность рассеяния электронов на угол, больший эффективного апертурного угла объективной линзы α_0, так как в изображении объекта участвуют только электроны, рассеянные в пределах апертурного угла. Эффективный апертурный угол определяется фокусным расстоянием и диаметром апертурной диафрагмы объектива, а также постоянной сферической аберрации.

Процессы упругого и неупругого взаимодействия предполагаются независимыми, что дает возможность вычислять сечения для обоих процессов (σ_e и σ_i) независимо друг от друга, считая, что общее сечение $\sigma = \sigma_e + \sigma_i$.

В настоящей работе в борновском приближении для электронов средних энергий рассчитаны сечения σ_e, σ_i, σ для свободных атомов.

1. УПРУГОЕ РАССЕЯНИЕ

Эффективное сечение упругого рассеяния можно определить как

$$\sigma_e = 2\pi \int_{\alpha_0}^{\pi} \frac{d\sigma_e}{d\Omega} \sin\vartheta \, d\vartheta, \qquad (1)$$

где $d\sigma_e/d\Omega$ — дифференциальное сечение упругого рассеяния; согласно Мотту [1] оно имеет вид

$$\frac{d\sigma_e}{d\Omega} = \frac{4}{a_0^2 q^4} [Z - f]^2; \qquad (2)$$

* Доложено на 3-м Всесоюзном совещании по электронной микроскопии, Ленинград, октябрь 1960 г.

Таблица 1

Сечения упругого рассеяния электронов с энергией 60 *кэв* для атомов с $Z = 3$—11 (в единицах 10^{-18} *см*^{2})

Z	Элемент	$\alpha_0 = 0$	10^{-3}	$2{,}5 \cdot 10^{-3}$	$5 \cdot 10^{-3}$	10^{-2}	$2{,}5 \cdot 10^{-2}$	$5 \cdot 10^{-2}$
3	Li	0,450	0,437	0,375	0,252	0,117	0,036	0,008
4	Be	0,715	0,704	0,657	0,508	0,265	0,066	0,020
5	B	0,899	0,889	0,841	0,702	0,411	0,103	0,030
6	C	1,026	1,019	0,939	0,827	0,558	0,152	0,042
6	$C_{вал}$	0,926	—	—	0,804	0,539	0,146	0,035
7	N	1,074	1,068	1,038	0,943	0,685	0,212	0,056
8	O	1,148	1,143	1,116	1,034	0,795	0,277	0,073
9	F	1,190	—	—	1,091	0,870	0,330	0,078
10	Ne	1,224	—	1,204	1,147	0,959	0,420	0,123
11	Na	1,973	—	1,834	1,510	1,086	0,472	—

$q = \frac{4\pi}{\lambda} \sin\vartheta$ — изменение волнового вектора электрона в результате рассеяния (2ϑ — угол рассеяния); f — рентгеновский атомный фактор.

Сечения упругого рассеяния рассчитывались численным интегрированием (1); при этом были использованы значения атомного фактора f, полученные нами ранее [2] и взятые из работ других авторов [3]. Полученные данные приведены в табл. 1.

2. НЕУПРУГОЕ РАССЕЯНИЕ

В соответствии с теорией Морзе [4] дифференциальное сечение неупругого рассеяния электронов имеет вид

$$\frac{d\sigma_i}{d\Omega} = \frac{4}{a_0^2 q^4} S, \tag{3}$$

где S — функция некогерентного рассеяния рентгеновских лучей. Согласно теории комптоновского рассеяния Валлера — Хартри [5] функция S определяется как

$$S = Z - \sum_{i,\,j=1}^{Z} |f_{ij}^2|, \tag{4}$$

где

$$f_{ij} = \int \psi_i(\vec{r})\, e^{i\vec{q}\vec{r}} \psi_j(r)\, d\tau. \tag{5}$$

Здесь $\psi_i(\vec{r})$ — одноэлектронные волновые функции рассеивающего атома. Суммирование в (4) ведется по всем электронам с одинаковым спином*.

При расчете непругого рассеяния для q следует, вообще говоря, пользоваться выражением

$$q = \frac{2\pi}{\lambda} \sqrt{(2\vartheta)^2 + \left(\frac{\Delta E}{E}\right)^2}, \tag{6}$$

учитывающим изменение волнового вектора не только по направлению, но и по величине. Однако если положить для оценки величину энергетических потерь электронов при неупругом рассеянии $\Delta E = 50$ *эв* и энергию электронов $E = 100$ *кэв*, то уже при углах, меньших 10^{-3} *радиан*, выражение (6) переходит в формулу для изменения волнового вектора при упругом рассеянии.

* В ранних работах по исследованию комптоновского рассеяния и неупругого рассеяния электронов при расчете S пренебрегали всеми f_{ij} при $i \neq j$. Однако, как показали недавние расчеты [6], учет этих членов приводит к существенному изменению функции S.

Таблица 2

Сечения неупругого рассеяния электронов с энергией 60 *кэв* для атомов с Z =3—11 (в единицах 10^{-18} *см*²)

Z	Элемент	$\alpha_0 = 2{,}5 \cdot 10^{-3}$	$5 \cdot 10^{-3}$	10^{-2}	$2{,}5 \cdot 10^{-2}$	$5 \cdot 10^{-2}$	Z	Элемент	$\alpha_0 = 2{,}5 \cdot 10^{-3}$	$5 \cdot 10^{-3}$	10^{-2}	$2{,}5 \cdot 10^{-2}$	$5 \cdot 10^{-2}$
3	Li	1,103	0,263	0,084	0,019	—	7	N	0,810	0,401	0,180	0,036	—
4	Be	0,881	0,356	0,115	0,025	0,007	8	O	0,789	0,412	0,195	0,044	0,010
5	B	—	0,380	—	—	—	9	F	—	0,404	0,205	0,049	—
6	C	—	0,390	0,165	0,031	—	10	Ne	0,732	0,389	0,202	0,053	0,012
6	$C_{вал}$	—	0,370	0,155	0,030	—	11	Na	1,248	0,488	0,206	0,058	0,015

В табл. 2 приведены значения эффективных сечений неупругого рассеяния электронов с энергией 60 *кэв*, полученные численным интегрированием (5) при помощи тех же функций самосогласованного поля Фока — Хартри, что и использованные при расчете атомных факторов рентгеновского рассеяния и сечений упругого рассеяния электронов (полные сечения неупругого рассеяния электронов не определялись из-за отсутствия достаточно надежных данных для функции S при малых углах рассеяния).

3. ПОЛНЫЕ СЕЧЕНИЯ. ОБСУЖДЕНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ

Вычисленные значения сечений упругого и неупругого рассеяния дают возможность определить полные (суммарные) сечения рассеяния, определяющие контраст изображения. На рис. 1 представлены полные

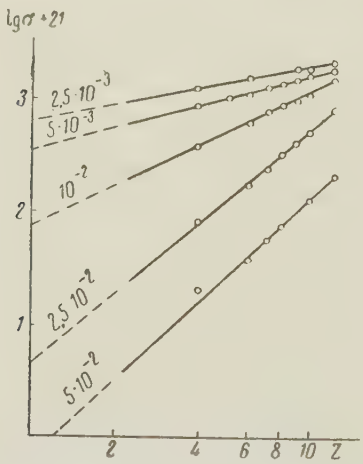


Рис. 1

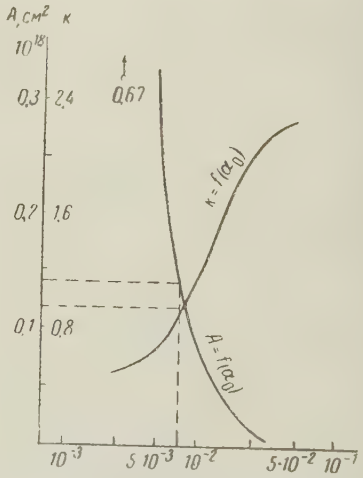


Рис. 2

сечения σ для различных апертурных углов как функция атомного номера рассеивающего атома. Как видно из графика, для каждого значения апертурного угла расчетные значения сечений могут быть довольно хорошо описаны приближенным уравнением

$$\sigma = AZ^k, \tag{7}$$

где A и k — постоянные, зависящие от α_0 и E.

Зависимость постоянных A и k от апертурного угла для $E = 60$ *кэв* показана на рис. 2.

Представляет особый интерес сравнить полученные нами теоретические результаты с экспериментальной зависимостью, установленной Холл [7] для $E = 65$ *кэв* и $\alpha_0 = 5 \cdot 10^{-3}$ *радиан*. Согласно ее данным

$$\sigma = 0{,}14 \cdot 10^{-18} Z \ (см^2). \tag{8}$$

Из рис. 2 можно установить, что при $k = 1$ значение коэффициента A сьма близко к $0{,}14 \cdot 10^{-18}$ *см*^{2}, что как раз совпадает с уравнением (8). ри этом апертурный угол $5 \cdot 10^{-3} < \alpha_0 < 10^{-2}$. Таким образом, установленная олл линейная зависимость сечения от атомного номера является частным учаем более общей степенной зависимости (7), которая имеет место лишь ри определенных значениях апертурного угла объектива.

ВЫВОДЫ

1. Рассчитаны эффективные сечения упругого и неупругого рассеяния ия электронов с энергией 60 *кэв* для 9 легких элементов ($Z = 3$—11).

2. Показано, что суммарные сечения в пределах исследованных эле-ентов могут быть описаны степенным уравнением

$$\sigma = AZ^k$$

постоянными A и k, зависящими от апертурного угла и ускоряющего апряжения.

3. Получено хорошее согласование расчетных данных с эксперимен-альными результатами по определению зависимости полных (суммарных) ечений от атомного номера.

ЛИТЕРАТУРА

. N. Mott, Proc. Roy. Soc. A, 1930, **127**, 658.
. А. Н. Пилянкевич, ЖТФ, 1960, **30**, 2, 226.
. P. Morse, Z. Physik, 1932, **33**, 11, 443.
. Internat. tables for crystall., **3**, 1961.
. L. Waller, D. Hartree, Proc. Roy. Soc. A, 1929, **124**, 119.
. D. T. Keating, G. H. Vineyard, Acta crystallogr., 1956, **9**, 985.
. C. E. Hall, J. Biophys. and Biochem. Cytol., 1955, **1**, 1.

Институт металлокерамики
и специальных сплавов АН УССР

Поступила в редакцию
17 IV 1961

РАДИОТЕХНИКА И ЭЛЕКТРОНИКА

1961 № 8

УСТРАНЕНИЕ АСТИГМАТИЗМА ПРОМЕЖУТОЧНОЙ ЛИНЗЫ ЭЛЕКТРОННОГО МИКРОСКОПА С ПОМОЩЬЮ СТИГМАТОРА ПРИ МИКРОДИФРАКЦИИ *

П. А. Стоянов, Н. М. Гришина

Описана возможность применения стигматора в промежуточной линзе электронного микроскопа для повышения качества микродифракционной картины. Исследования были проведены на электронном микроскопе УЭМБ-100. Стигматор представлял собой две пары катушек, расположенных в плоскости, перпендикулярной оптической оси микроскопа. Он располагался в тубусе объектива вблизи селекторной диафрагмы. При помощи стигматора в результате компенсации астигматизма промежуточной линзы удалось повысить разрешение электронограмм. Искажений масштаба изображения дифракционной картины при стигмировании не наблюдалось.

Сравнение электронограмм, полученных с микроучастков объекта различного диаметра, позволяет установить следующую закономерность: чем меньше микроучасток, тем выше разрешение электронограммы. Улучшение разрешения является результатом малого влияния аберраций промежуточной линзы вследствие уменьшения входной апертуры этой линзы. Обе величины — размер микроучастка и апертура промежуточной линзы — зависят от диаметра селекторной диафрагмы. Поэтому уменьшение микроучастка, осуществляемое соответствующим уменьшением селекторной диафрагмы, сопровождается снижением апертуры промежуточной линзы.

На разрешение электронограмм преимущественно влияют сферическая аберрация и приосевой астигматизм [1]. Известно, что приосевой астигматизм промежуточной линзы можно компенсировать стигматором [2]. Целесообразность применения стигматора очевидна при наблюдении электронограмм с больших микроучастков объекта, так как в этом случае входная апертура велика и влияние аберраций значительное. Однако необходимость наблюдать дифракционную картину с большого участка объекта встречается редко. Как правило, ценность результатов микродифракционных исследований возрастает, если наблюдение электронограмм ведется с участков минимального размера. Поскольку входная апертура промежуточной линзы мала, влияние аберраций и в их числе астигматизма резко уменьшается. Необходимость применения стигматора в этом случае можно установить только экспериментальным путем.

Одной из задач настоящей работы являлось выяснение целесообразности применения стигматора в промежуточной линзе прежде всего для этого, часто встречающегося случая работы микроскопа с малой входной апертурой промежуточной линзы. Исследования проводились на электронном микроскопе УЭМБ-100. В тубусе объектива, в непосредственной близости от селекторной диафрагмы, был установлен стигматор (рис. 1). Он представлял собой две пары катушек, расположенных в плоскости перпендикулярной оптической оси микроскопа. Взаимное расположение катушек показано на рис. 2. Обмотки каждой пары катушек были включены последовательно и имели независимый источник питания с реостатом

* Доложено на 3-м Всесоюзном совещании по электронной микроскопии, Ленинград, октябрь 1960 г.

ия регулировки величины тока возбуждения. Геометрические оси обеих ар пересекались друг с другом под углом 45°. Надлежащим подбором ка изменялись величина и ориентация астигматизма, привносимого стиг-атором. Тест-объектом служило поликристаллическое серебро, получае-ое термическим напылением в вакууме на коллодиевую пленку. Наблю-ение и фотографирование электронограмм происходили с участков объекта

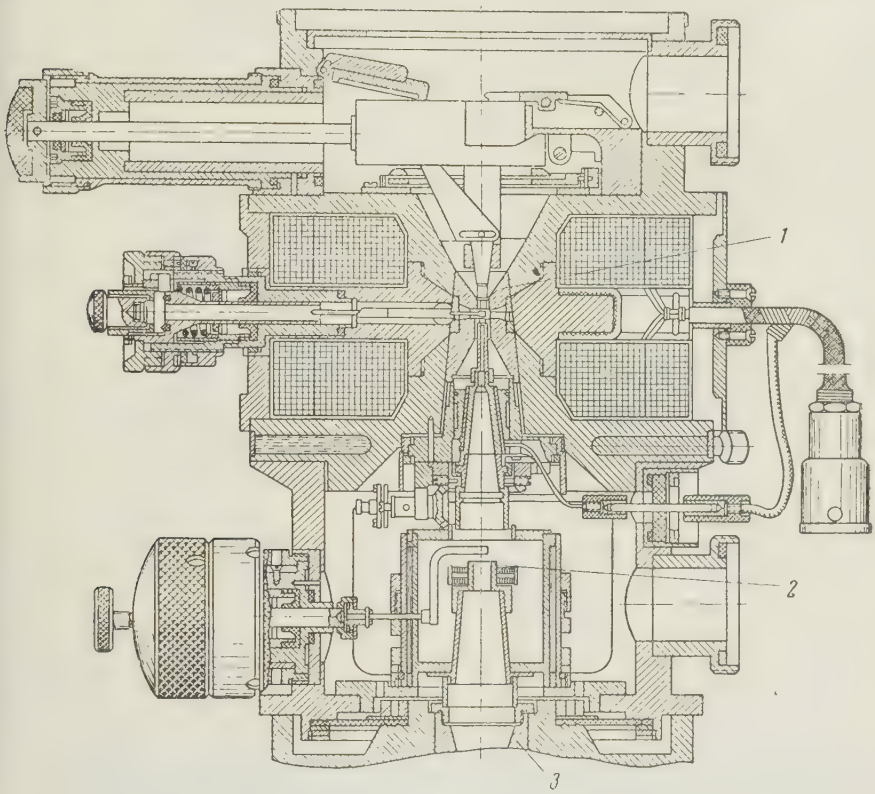


Рис. 1. Объектив микроскопа УЭМБ-100 со стигматором:
1 — полюсный наконечник объектива; *2* — стигматор промежуточной линзы; *3* — полюсный наконечник промежуточной линзы

различного размера. В каждом случае электронограмма фотографирова-ась дважды: с выключенным и включенным стигматором. Во втором слу-ае приосевой астигматизм промежуточной линзы был скомпенсирован. Полученные снимки электронограмм серебра приведены на рис. 3. Элек-ронограммы левого столбца сфотографированы без стигматора. Верхняя лектронограмма получена с участка диаметром 17 *мк*. Ниже идут электро-ограммы с участков диаметром 10 и 5 *мк* соответственно.

Справа приведены электронограммы, сфотографированные с микро-частков тех же размеров, но со стигматором. На любой паре снимков, олученных с одного и того же участка объекта при выключенном и вклю-енном стигматоре, заметно повышение разрешения электронограмм в ре-ультате компенсации астигматизма промежуточной линзы. Об этом же видетельствуют кривые (рис. 3), полученные фотометрированием двух лизко расположенных колец, отмеченных на рисунке стрелками. Это от-осится к электронограммам, полученным со сравнительно малого участка бъекта. Наименьший диаметр участка объекта, с которого производилось равнение электронограмм, получаемых со стигматором и без него, со-тавлял 2,5 *мк*. Дальнейшее значительное уменьшение размера микро-частка (ниже 1 *мк*) сопровождалось падением яркости дифракционной

картины, что затрудняло наблюдение. Электронограммы с участка минимального размера приведены на рис. 4. Даже в случае, когда входная апертура промежуточной линзы составляла незначительную величину, равную $3 \cdot 10^{-4}$, наблюдалось заметное ухудшение разрешения электронограмм вследствие влияния астигматизма. Правда, последнее не всегда имело место. Иногда влияние астигматизма при указанной входной апертуре почти не обнаруживалось, так как величина приосевого астигматизма не оставалась постоянной. Она зависела не только от асимметрии магнитного поля промежуточной линзы, но и от влияния электростатических полей зарядов, скапливающихся на деталях, расположенных вблизи пучка. Это относится и к селекторной диафрагме — самому узкому месту, через которое проходит электронный пучок. Очевидно, что чем меньше диаметр диафрагмы, тем сильнее сказывается влияние зарядов и тем, следовательно, больше становится астигматическая разность фокусных расстояний промежуточной линзы. Накопление зарядов носит случайный характер. С течением времени в результате образования загрязнений (рост угольных слоев и т. п.) их величина и расположение меняются. Соответственно изменяется и астигматизм промежуточной линзы.

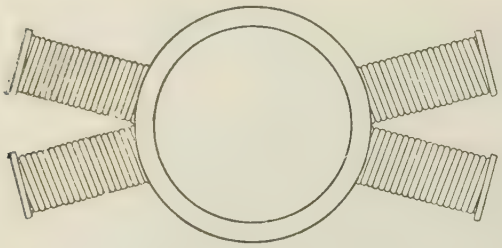


Рис. 2. Стигматор промежуточной линзы

Метод устранения астигматизма по каустике, которым можно пользоваться [2, 3], в данном случае не всегда пригоден, так как каустика наблюдается до установки на пути пучка селекторной диафрагмы. Следовательно, при стигмации по каустике не учитывается влияние селекторной диафрагмы. Если диафрагма имеет диаметр 1—0,4 *мм*, ее влияние невелико и результаты получаются хорошими. Если диаметр порядка 0,1 *мм* и меньше, диафрагма может внести значительный астигматизм. В этом случае по каустике можно производить предварительную настройку стигматора. Окончательная компенсация астигматизма должна производиться после установки на место селекторной диафрагмы. Компенсация астигматизма устанавливается по форме изображения диафрагмы в тот момент, когда размер ее изображения переходит через минимум. Если изображение вплоть до самого минимума не вытягивается в каком-либо направлении — астигматизм скомпенсирован. На рис. 5 приведены три фотографии каустики. Левая сфотографирована до компенсации астигматизма; средняя — после того, как астигматизм был скомпенсирован по каустике. Затем на пути пучка была установлена селекторная диафрагма и произведена окончательная установка стигматора. После удаления диафрагмы каустика имела вид, показанный на правой фотографии. Ее форма свидетельствует о наличии астигматизма. Очевидно, что он исчезает после возвращения на место селекторной диафрагмы.

Следовательно, применение стигматора может дать эффект и в случае наблюдения электронограмм с малого микроучастка, так как сама селекторная диафрагма дает дополнительный астигматизм.

Стигматор — это цилиндрическая линза, которая наряду с астигматизмом искажает масштаб изображения, в результате чего дифракционные кольца приобретают форму эллипса. Выполненный нами расчет показал, что искажение масштаба изображения зависит от расположения стигматора относительно селекторной диафрагмы. Численное значение этой величины можно найти из следующего выражения:

$$\frac{\Delta r_0}{r_0} = 0{,}5 \frac{\Delta f}{f^2} t \frac{p+t}{p}.$$

MTA Szám... Könyvtára

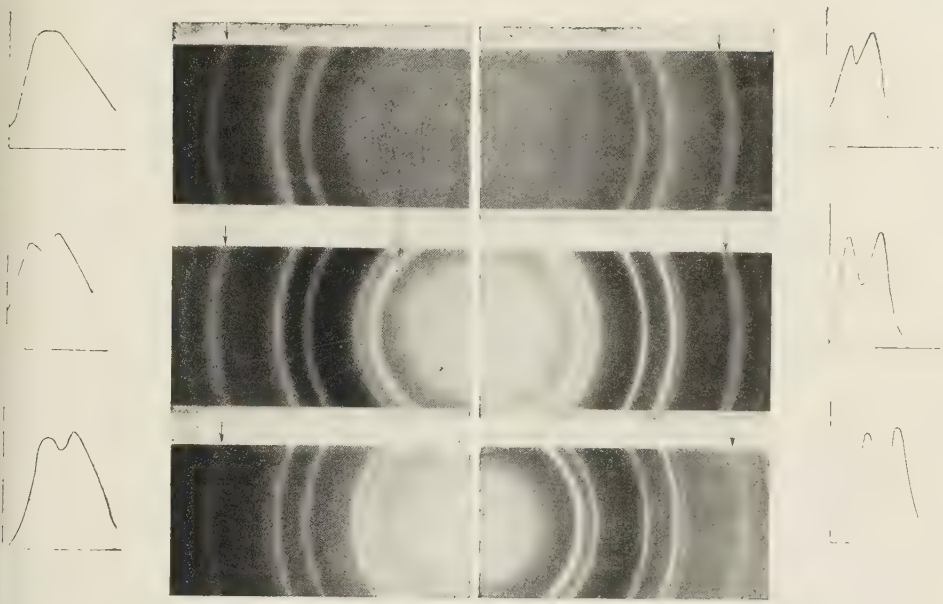


Рис. 3. Электронограммы серебра, полученные с различных микроучастков без стигматора (слева) и со стигматором (справа)

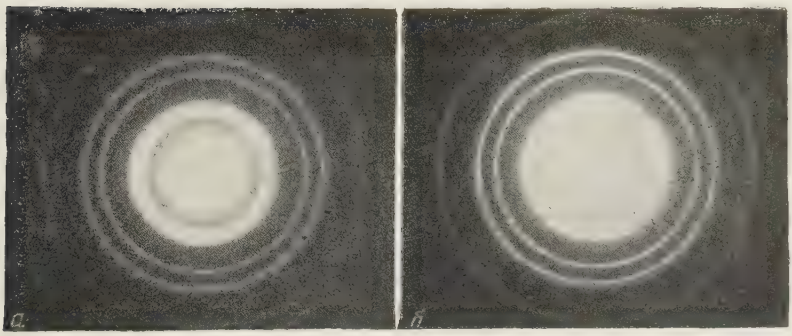


Рис. 4. Электронограммы серебра, полученные с микроучастка диаметром 2,5 *мк*:

а — без стигматора; *б* — со стигматором

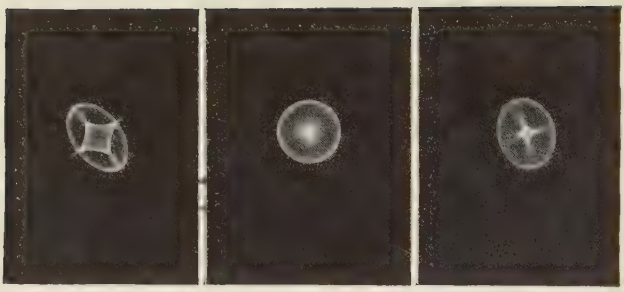


Рис. 5. Изменение формы каустики

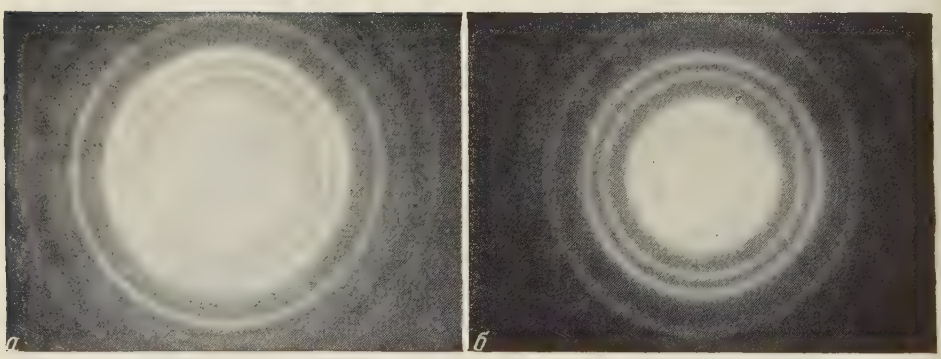


Рис. 6. Искажение масштаба дифракционных колец при установке стигматора около селекторной диафрагмы (*а*) и в полюсном наконечнике промежуточной линзы (*б*)

десь $\Delta r_0/r$ — абсолютное значение максимального относительного приащения радиуса дифракционного кольца; Δf — астигматическая разость фокусных расстояний, привносимая стигматором; f — фокусное асстояние промежуточной линзы; t— расстояние от селекторной диафагмы до стигматора; p — расстояние от задней фокальной плоскости бъектива до селекторной диафрагмы. Следовательно чем ближе стигмаор к селекторной диафрагме, тем меньше искажения. Поскольку селекорная диафрагма должна быть расположена где-то посредине между бъективом и промежуточной линзой там же следует поместить и стигатор.

Чтобы проверить этот вывод, стигматор устанавливали поочередно двух разных местах. В первом случае он находился вблизи селекторной иафрагмы (рис. 1), а во втором — в полюсном наконечнике промежуточой линзы. В обоих случаях были заданы одинаковые астигматические азности фокусных расстояний и получены дифракционные снимки, приеденные на рис. 6. Для того чтобы получить достаточно заметное искажение масштаба изображения, величина Δf в этом эксперименте превосодила астигматическую разность фокусных расстояний при компенсаии астигматизма в шесть раз. Когда стигматор находился вблизи селекорной диафрагмы, искажения масштаба изображения были минимальыми (рис. 6, *а*). Во втором случае (рис. 6, *б*) искажения масштаба изобраения возросли в несколько раз.

Выводы. Применение стигматора в промежуточной линзе целесообразно не только при наблюдении электронограмм с больших микроучастов, но и в более важном для практики случае исследования дифракионных спектров с участка объектов минимального размера. В обоих лучаях стигматор повышает разрешение электронограмм.

Стигматор, являющийся цилиндрической линзой искажает форму ифракционных колец. Для того, чтобы эти искажения были минимальыми, его необходимо располагать в непосредственной близости от селекорной диафрагмы и, следовательно, на значительном расстоянии от проежуточной линзы.

ЛИТЕРАТУРА

. F. Lenz, Optik, 1959, **16**, 8, 457.
W. D. Riecke, E. Ruska, Z. wiss. Mikrosk. 1957, **63**, 5, 288.
. S. Leisegang, Optik, 1953, **10**, 10 5.

Поступила в редакцию
7 II 1961

РАДИОТЕХНИКА И ЭЛЕКТРОНИКА

1961 № 8

ЮСТИРОВКА ЭЛЕКТРОННОГО МИКРОСКОПА ПРИ ПОМОЩИ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ПОЛЕЙ*

П. А. Стоянов

При помощи отклоняющих систем, играющих роль призм в электронной оптике, можно отъюстировать электронный микроскоп.

Рассмотрены свойства магнитной призмы, представляющей собой цилиндр с четырьмя разрезами, образующими две пары токопроводов. Каждая пара является отклоняющей системой. Приведены результаты расчета угла отклонения в зависимости от геометрических и оптических параметров и формулы для расчета аберраций. Работа призмы была проверена на электронном микроскопе.

Магнитные поля, присутствующие в колонне электронного микроскопа, нарушают соосность линз и других оптических элементов прибора. Поэтому высокая точность изготовления прибора сама по себе еще не обеспечивает надлежащей юстировки узлов колонны. Обычно в микроскопах высокого разрешения ряд ответственных узлов может перемещаться друг относительно друга, что позволяет отъюстировать микроскоп с необходимой точностью. Однако как бы ни была совершенна конструкция механизмов юстировки, жесткость колонны микроскопа снижается. Микроскопы становятся чувствительными к вибрациям. Приходится делать выбор: либо надежно и точно работающий механизм, юстирующий какой-либо узел, но пониженная жесткость, либо повышенная жесткость за счет ухудшения работы механизма.

Эта альтернатива заставила искать иные способы юстировки микроскопа. В частности, по новому пути пошла фирма «Метрополитен Виккерс», выпускающая микроскопы ЕМ-6. В этом приборе механическая юстировка осветительной системы заменена магнитными и электростатическими отклоняющими системами. В результате сохранена жесткость сочленения осветительной системы с объективом. Юстировку микроскопа при помощи отклоняющих полей применяет также фирма «Филипс».

Применение в качестве юстирующих элементов отклоняющих полей, которые играют роль регулируемых призм, связано с искажениями, вызываемыми аберрациями. Аберрации призм, юстирующих осветительную систему, не имеют большого значения. В случае применения призм для юстировки объектива аберрации могут снизить разрешающую способность микроскопа. Поэтому возможность их применения в последнем случае следует рассмотреть особо.

В общем случае в результате неточного изготовления колонны, а также вследствие влияния полей рассеяния ось объектива смещена и повернута относительно оси проекционной системы линз (рис. 1). Соответствующий наклон осветительной системы позволяет вывести либо вершину каустики, либо магнитный центр в центр промежуточного изображения [1]. В первом случае микроскоп работает с минимальной сферической, а во втором — с минимальной хроматической аберрациями. Чтобы обе аберрации достигли минимума одновременно, надо оба центра совместить с центром изображе-

* Доложено на 3-м Всесоюзном совещании по электронной микроскопии, Ленинград, октябрь 1960 г.

ния. Для этого можно на пути пучка поставить две регулируемые призмы: одну около объектива, другую вблизи предметной плоскости объектива. Действие первой призмы эквивалентно повороту объектива таким образом, что его ось пересекается с осью проекционной системы линз в точке, расположенной в плоскости нижней призмы (на рис. 1 показано пунктиром). Действие второй эквивалентно повороту всей системы, находящейся перед второй призмой, до совпадения оси объектива с осью проекционной системы (показано штрих-пунктирной линией). В результате мы получаем отъюстированную систему.

Аберрации первой призмы должны быть минимальными, так как только в этом случае можно отъюстировать микроскоп без ухудшения разрешающей способности.

Аберрацию отклоняющей системы в общем виде можно записать так [2]:

$$\Delta x_1 = b_8\alpha^2\beta \sin 2\chi - b_4\alpha\beta^2 \cos\chi, \qquad (1)$$

$$\Delta y_1 = \frac{1}{2}\,[b_8 + b_{13} + (b_8 - b_{13})\cos 2\chi]\,\alpha^2\beta - b_5\alpha\beta^2 \cdot \sin\chi + b_1\beta^3,$$

где α — полуугол раскрытия пучка; β — угол отклонения пучка призмой; b_1, b_4 и т. д.— коэффициенты аберраций.

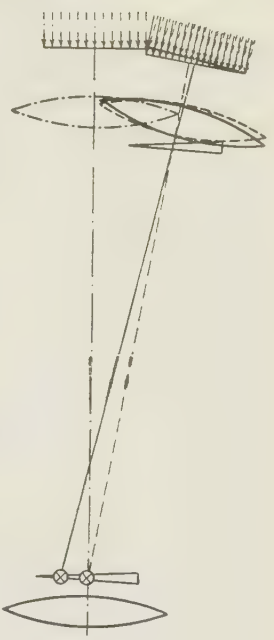


Рис. 1. Юстировка объектива при помощи двух отклоняющих систем

Для расчета численных значений коэффициентов аберраций необходимо перейти к рассмотрению конкретных конструкций призмы. Ниже приведены результаты расчетов магнитной призмы, конструкция которой схематически представлена на рис. 2. Призма представляет собой цилиндр с четырьмя разрезами, образующими две пары токопроводов. Каждая пара является отклоняющей системой. Магнитное поле тока, протекающего от точки a_1 к точке a_2, отклоняет пучок в одном направлении. Поле тока, протекающего от точки b_1 к точке b_2, отклоняет пучок в перпендикулярном направлении. Независимая регулировка величины тока в обеих парах токопроводов при помощи реостатов R_a и R_b (см. схему рис. 2 в левом нижнем углу) дает возможность отклонять пучок в произвольном направлении.

Такая форма отклоняющей системы позволяет применить технологию изготовления, разработанную для стигматоров микроскопов УЭМБ-100 и УЭМВ-100 [3], и получить высокую точность изготовления и установки системы в объективе микроскопа, что необходимо для уменьшения аберраций системы.

Магнитное поле призмы, рассчитанное по формуле Био и Савара в окрестности оси, равно

$$H_x = \frac{2\sqrt{2}}{3\pi}\,\frac{I}{c}\,\frac{1}{R}\left(6H_0 - \frac{2H_0 + H_1 - H_2}{R^2}\,x^2 + \frac{2H_0 + H_1 + 5H_2}{R^2}\,y^2 + \ldots\right),$$

$$H_y = \frac{4\sqrt{2}}{3\pi}\,\frac{I}{c}\,\frac{1}{R}\,\frac{2H_0 + H_1 - H_2}{R^2}\,xy + \ldots, \qquad (2)$$

$$H_0 = \frac{l+z}{[R^2+(l+z)^2]^{1/2}} + \frac{l-z}{[R^2+(l-z)^2]^{1/2}},$$

$$H_1 = R^2\left\{\frac{l+z}{[R^2+(l+z)^2]^{3/2}} + \frac{l-z}{[R^2+(l-z)^2]^{3/2}}\right\},$$

$$H_2 = \frac{3}{2}R^4\left\{\frac{l+z}{[R^2+(l+z)^2]^{5/2}} + \frac{l-z}{[R^2+(l-z)^2]^{5/2}}\right\}.$$

где H_x и H_y — составляющие напряженности магнитного поля по осям x и y; I — ток возбуждения; R и l — радиус и полудлина отклоняющей системы соответственно; c — скорость света в вакууме.

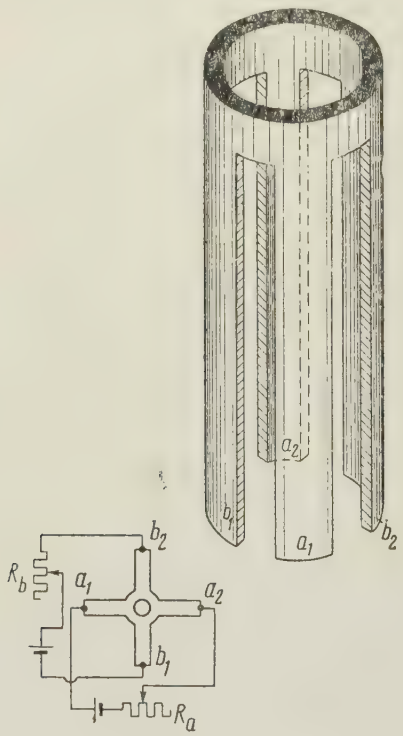


Рис. 2

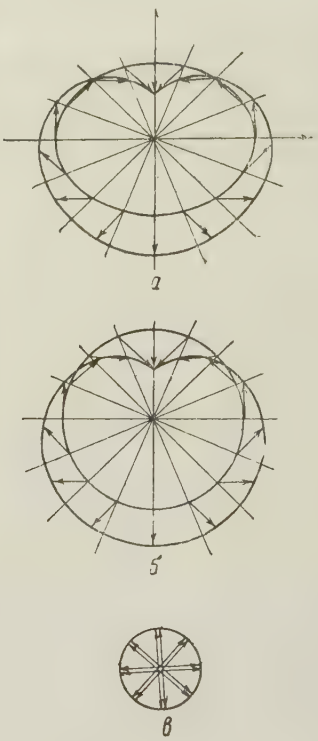


Рис. 3

Рис. 2. Конструкция токопроводов призмы. Внизу слева — электрическая схема независимого питания двух пар токопроводов

Рис. 3. Аберрационные фигуры:

а — общий случай; *б* — превращение астигматического эллипса в круг изменением фокуса объектива; *в* — компенсация астигматизма призмы стигматором объектива. Остается «вырожденная» кома (круг).

Угол отклонения в призме равен $\beta = \theta n$; θ — константа, вторая вычисляется по формуле $\theta = \frac{16}{\pi}\frac{1}{c^2}\sqrt{\frac{e}{m}}\frac{I}{\sqrt{u}}$, а n — отношение полудлины отклоняющей системы к радиусу ($n = l/R$). В приводимой формуле u обозначает ускоряющее напряжение; e/m — удельный заряд электрона.

Аберрация в приосевой точке вычисляется по формулам

$$\Delta x_0 = \frac{1}{3}f\left(\frac{f}{R}\right)^2\alpha^2\beta\sin 2\chi - A(n)f\frac{f}{R}\alpha\beta^2\cos\chi, \qquad (3)$$

$$\Delta y_0 = \frac{1}{3}f\left(\frac{f}{R}\right)^2\alpha^2\beta\cos 2\chi + B(n)f\frac{f}{R}\alpha\beta^2\sin\chi,$$

где $A(n)$ и $B(n)$ — коэффициенты, которые зависят только от n; f — фокусное расстояние объектива.

Приведенные выражения являются частным случаем, вытекающим из общих формул (1), если положить $b_8 = -b_{13}$ и не учитывать дисторсию (член, содержащий коэффициент b_1), которая не влияет на разрешение микроскопа.

Таким образом, рассматриваемая отклоняющая система вносит аберрацию астигматизма первого порядка (второй член) и кому, причем кома вырожденная (фигура рассеяния — круг).

Исходя из вышеизложенных результатов расчета, мы устанавливаем важное свойство отклоняющей системы: при пропорциональном изменении размеров системы ($n = \text{const}$) и сохранении постоянными тока возбуждения и ускоряющего напряжения угол отклонения β не изменяется. Аберрации же системы уменьшаются: кома обратно пропорционально квадрату, а астигматизм — обратно пропорционально первой степени радиуса.

Коэффициенты A и B можно вычислить. Если $n = 2{,}5$, $R = 3{,}4$ *мм* (параметры исследованной системы), то $A = 0{,}75$, $B = 0{,}6$. Соответствующая фигура аберрации показана на рис. 3,*а*. Эллипс представляет собой аберрацию астигматизма. Стрелками показано смещение точек пересечения лучей с плоскостью изображения, вызванное комой. Фокусировкой объектива можно превратить аберрационную фигуру астигматизма в круг (рис. 3,*б*). При помощи стигматора объектива астигматизм можно скомпенсировать, и тогда останется аберрация комы, также в виде круга, показанного на рис. 3,*в*.

Действие описанной отклоняющей системы было проверено на электронном микроскопе. Точка изображения объекта, с которой совпадает магнитный центр, и сам магнитный центр смещаются вместе. Вершина каустики перемещается на меньшую величину, чем точка, в которой находилась первая до смещения. Это объясняется, по-видимому, тем, что положение точки нулевой комы при работе отклоняющей системы зависит не только от объектива, но и от отклоняющей системы.

З а к л ю ч е н и е. При помощи отклоняющих систем, играющих роль призм в электронной оптике, можно отъюстировать электронный микроскоп. Отклоняющие системы вносят дополнительные аберрации: кому и астигматизм первого порядка, которые можно снизить. Применяя описанную выше отклоняющую систему, следует увеличить диаметр ее, сохранив при этом отношение диаметра к длине. В этом случае угол отклонения пучка при прочих равных условиях сохраняется постоянным, а аберрации уменьшаются.

ЛИТЕРАТУРА

1. S. L e i s e g a n g, Optik, 1954, 2, 9, 397.
2. В. Г л а з е р, Основы электронной оптики, ГИТТЛ, 1957.
3. П. А. С т о я н о в, Оптико-механическая промышленность, 1958, 4, 40.

Поступила в редакцию
7 II 1961

РАДИОТЕХНИКА И ЭЛЕКТРОНИКА

1961 № 8

АНАЛИЗ АБЕРРАЦИЙ, ВОЗНИКАЮЩИХ ИЗ-ЗА ДЕФЕКТОВ ИЗГОТОВЛЕНИЯ И ЮСТИРОВКИ ЭЛЕКТРОННЫХ МИКРОСКОПОВ*

Ю. В. Воробьев

Анализ полевых хроматических аберраций увеличения и поворота показывает, что они могут быть существенным образом исправлены лишь путем качественной юстировки микроскопов.

Дефекты изготовления объективной линзы приводят наряду с осевым астигматизмом к появлению и других аберраций, которые могут снижать разрешающую способность микроскопов. Сравнены различные методы юстировки микроскопов и обсуждены требования к юстировке микроскопов предельного разрешения.

1. АБЕРРАЦИИ ВТОРОГО ПОРЯДКА

Разрешающая способность электронных микроскопов ограничивается центральными аберрациями: сферической, хроматической и дифракционной, которые принципиально нельзя устранить полностью. Наряду с этими аберрациями в реальных приборах имеются ошибки, возникающие из-за дефектов изготовления и юстировки и препятствующие получению предельных разрешений.

Важнейшую из этих ошибок — осевой астигматизм полюсных наконечников объективной линзы,— как известно, можно полностью устранить при помощи стигматора. Однако многочисленные опыты показали, что при работе с полюсными наконечниками при большой астигматической разности фокусных расстояний стигматор не полностью компенсирует ошибки изготовления, снижая их лишь примерно на порядок. Это обстоятельство говорит о том, что в приборах высокого разрешения с регулируемым стигматором существенную роль играют аберрации второго порядка, возникающие из-за дефектов изготовления полюсных наконечников. В опубликованных работах [1, 2, 3], посвященных исследованию ошибок изготовления, влияние аберраций второго порядка на разрешение не исследовалось, так как справедливо полагалось, что в системе без регулируемого стигматора эти ошибки малы по сравнению с осевым астигматизмом. После введения в микроскопы высокого разрешения регулируемых стигматоров и устранения астигматизма эти ошибки стали сказываться на качестве изображения в микроскопах. Анализ важнейшей из этих ошибок и способы ее устранения мы рассмотрим.

Пусть на оси объектива нет отклоняющих полей и астигматизм скомпенсирован. Тогда с точностью до членов второго порядка разложение магнитного поля в ряд имеет вид [4]

$$\begin{aligned} B_z(x, y, z) &= B_z - \frac{1}{4} - B_z''(x^2 + y^2) + \ldots, \\ B_x(x, y, z) &= -\frac{1}{2} B_z' x + 6\,\Sigma_3' xy + 3\varepsilon_3'(x^2 - y^2) + \ldots, \\ B_y(x, y, z) &= -\frac{1}{2} B_z' y - 6\varepsilon_3' xy + 3\,\Sigma_3'(x^2 - y^2) + \ldots, \end{aligned} \tag{1}$$

* Доложено на 3-м Всесоюзном совещании по электронной микроскопии, Ленинград, октябрь 1960 г.

где ε_3', Σ_3' — функции от z, характеризующие асимметрию поля. Соответствующие формулы аберраций в плоскости Гаусса при отображении точки на оси можно получить обычным способом и записать в следующей форме:

$$\Delta x = 3\eta^* \alpha^2 \int_{z_0}^{z_b} [\Sigma_3' \cos(3\theta + 2\psi) - \varepsilon_3' \sin(3\theta + 2\psi)]\, r_\alpha^3\, dz,$$

$$\Delta y = -3\eta^* \alpha^2 \int_{z_0}^{z_b} [\Sigma_3' \sin(3\theta + 2\psi) + \varepsilon_3' \cos(3\theta + 2\psi)]\, r_\alpha^3\, dz,$$

где $\eta^* = \sqrt{e/2mv}$; α — апертурный угол; θ — угол поворота траектории в магнитном поле; ψ — азимутальный угол в плоскости предмета. Исключая ψ, получим фигуру рассеяния в виде круга с радиусом

$$\Delta r = 3\eta^* \alpha^2 \sqrt{\left(\int_{z_0}^{z_b} (\Sigma_3' \cos 3\theta - \varepsilon_3' \sin 3\theta)\, r_\alpha^3\, dz\right)^2 + \left(\int_{z_0}^{z_b} (\Sigma_3' \sin 3\theta + \varepsilon_3' \cos 3\theta)\, r_\alpha^3\, dz\right)^2}. \quad (2)$$

Для того чтобы количественно оценить влияние этой аберрации на качество изображения в электронных микроскопах в соответствии с установившейся традицией, рассмотрим простейшую магнитную линзу, состоящую из одного витка. Пусть уравнения, описывающие форму витка в полярных координатах, имеют вид

$$\varrho = R_0 + \lambda \rho_1(\varphi), \qquad \zeta = \lambda \xi_1(\varphi), \quad (3)$$

где R_0 — радиус витка; φ — азимутальный угол; λ — параметр, характеризующий асимметрию. Форма искаженного витка представлена на рис. 1. Как видно из дальнейшего, интересующую нас аберрацию вызывают искажения вида

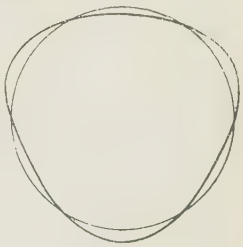


Рис. 1. Форма искаженного витка

$$\rho_1(\varphi) = A\cos 3\varphi + B\sin 3\varphi, \quad \zeta_1(\varphi) = a\cos 3\varphi + b\sin 3\varphi. \quad (4)$$

Из закона Био—Саварра при помощи формул (3) и (4) можно вычислить возмущение магнитного поля, вызванного такого рода асимметрией:

$$\varepsilon_3'(z) = \lambda \frac{5NI\mu_0}{8}\left[-R_0 a + \frac{7}{4}\frac{zR_0}{R_0^2 + z^2}(za - R_0 A)\right]\frac{R_0^2}{(R_0^2 + z^2)^{7/2}},$$

$$\Sigma_3'(z) = \lambda \frac{5NI\mu_0}{8}\left[-R_0 b + \frac{7}{4}\frac{zR_0}{R_0^2 + z^2}(zb - R_0 B)\right]\frac{R_0^2}{(R_0^2 + z^2)^{7/2}}. \quad (5)$$

Нами были проделаны численные расчеты величины аберрации по формуле (5) для случая, когда фокусное расстояние составляет 1,2 от

радиуса витка ($f = 1{,}2\ R_0$). Если обозначить через Δl величину отклонения витка от плоскости, а ΔR — величину отклонения витка от круга по радиусу, то аберрации равны

$$\Delta r = (3{,}5\,\Delta l + 1{,}5\,\Delta R)\,\alpha^2.$$

Взяв апертуру освещения, равную $5 \cdot 10^{-3}$, получаем, что при отклонении от круга в 1 *мк* ($\Delta l = \Delta R = 1$ *мк*) аберрация равна $\Delta r = 1{,}25$ Å.

Таким образом, в микроскопах высокого разрешения величина этой аберрации становится уже заметной. Бороться с ней можно или повышением точности изготовления полюсных наконечников или специальным компенсатором.

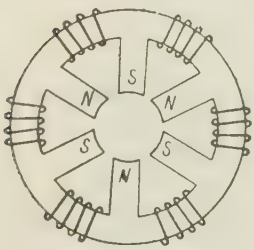


Рис. 2. Три магнитных отклоняющих системы

Аналогично тому, как это делается с осевым астигматизмом, можно построить вспомогательную линзу, позволяющую компенсировать аберрацию второго порядка предшествующей системы. Если обратиться к формулам магнитного поля (1), то легко видеть, что скалярный магнитный потенциал в полярных координатах имеет вид

$$\Phi(x, y, z) = \Phi(z) - \frac{1}{4} B_z' r^2 + \\ + r^3 \left(\sum_3' \sin 3\varphi + \varepsilon_3' \cos 3\varphi\right) + \ldots .$$

Для компенсации рассматриваемой аберрации нужно использовать магнитное поле, обладающее сходными свойствами симметрии. Такое поле образуется в системе из трех отклоняющих систем (рис. 2) и в окрестности оси имеет вид

$$\Phi_к(z) = r^3 \Omega'(z) \cos 3(\varphi + \nu),$$

где ν — угол поворота системы относительно оси z; $\Omega'(z)$ — функция, зависящая от конфигурации магнитов и пропорциональная величине возбуждения. Легко показать, что, поворачивая эту систему и подбирая токи в обмотке возбуждения, можно полностью исправить рассмотренную выше аберрацию второго порядка и скомпенсировать таким образом дефекты изготовления полюсных наконечников объектива.

2. ЮСТИРОВКА ЭЛЕКТРОННЫХ МИКРОСКОПОВ

Обычно цель юстировки микроскопа видят в совмещении осей всех его элементов — освещения, объектива, промежуточной и проекционной линз. В работе [5] проделаны расчеты и определены допуски на взаимные отклонения осей линз микроскопа.

Подобная постановка задачи нам кажется не совсем правильной. Во-первых, речь идет об осях электронных линз, которые мы не можем наблюдать, и, следовательно, очень затруднена проверка достигнутого качества юстировки; во-вторых, наличие отклоняющих полей в колонне микроскопа и в самих линзах делает неопределенным само понятие оси линзы.

Практически конечной целью юстировки, очевидно, является исправление тех аберраций, которые влияют на качество изображения. При этом контроль юстировки нужно вести по наблюдаемым величинам — положениям точки без комы и вольтового и магнитного центров. Покажем, что этих величин достаточно для исправления всех аберраций несоосности, влияющих на качество изображения.

Вследствие дефектов юстировки прибора на его экране мы видим область объекта, отстоящую на заметном расстоянии от оси объектива; поэтому на качестве изображения существенно сказываются неосевые аберрации. Так как кривизна изображения не является существенной из-

за малости поля зрения микроскопа, а неосевой астигматизм, так же, как и осевой, можно исправить стигматором, то остаются две аберрации, которые и портят изображение: кома и полевая хроматическая аберрация. На них мы и остановимся подробнее. Начнем с аберрации комы. Допустим, что на экране мы рассматриваем некоторую точку объекта P_0 с координатами x_0, y_0. Если через x_0', y_0' обозначить наклон траектории в P_0 относительно оси объектива, а через t_x и t_y — проекции единичного вектора, направленного вдоль оси освещения; γ — апертурный угол, то

$$x_0' = t_x + \gamma\cos\psi, \quad y_0' = t_y + \gamma\sin\psi.$$

Выражения аберраций принимают вид

$$\Delta x = B\gamma^3\cos\psi + \gamma^2[(2+\cos 2\psi)(Bt_x + Fx_0 - fy_0) + \sin 2\psi\,(Bt_y + Fy_0 + fx_0)],$$
$$\Delta y = B\gamma^3\sin\psi + \gamma^2[(2-\cos 2\psi)(Bt_y + Fy_0 + fx_0) + \sin 2\psi\,(Bt_x + Fx_0 - fy_0)], \tag{6}$$

B, F, f — коэффициенты аберраций: сферической, изотропной и анизотропной ком. Таким образом мы видим, что на объекте имеется точка $P_к$, в которой при наклонном освещении отсутствует аберрация комы. Такую точку называют точкой без комы или иногда, следуя [6], острием каустики. Наклоном осей осветителя и объектива эту точку можно вывести в центр экрана. Невыполнение этого условия ведет к потерям в разрешении. Оценим величину этих потерь. Пусть точка без комы отстоит на некотором расстоянии r от точки P_0, изображение которой мы видим на экране прибора.

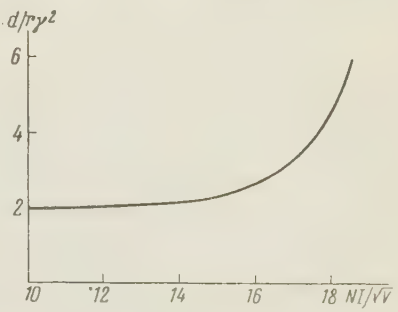


Рис. 3. Зависимость комы от величины возбуждения в объективной линзе

Условия исчезновения комы в формуле (6) дают следующие координаты точки без комы:

$$x_к = -\frac{B}{F^2+f^2}(Ft_x + ft_y), \quad y_к = -\frac{B}{F^2+f^2}(Ft_y - ft_x).$$

Если положить, что $x_0 = x_к + r_x$, $y_0 = y_к + r_y$, то в рассматриваемой нами точке P_0 наряду со сферической аберрацией будет ошибка комы:

$$\Delta x_к = \gamma^2[(2+\cos 2\psi)(Fr_x - fr_y) + \sin 2\psi\,(Fr_y + fr_x)],$$
$$\Delta y_к = \gamma^2[(2-\cos 2\psi)(Fr_y + fr_x) + \sin 2\psi\,(Fr_x - fr_y)],$$

и величина отрезка комы равна

$$d = 3\gamma^2\sqrt{F^2+f^2}\,r. \tag{7}$$

Зависимость возникающей комы от величины возбуждения в объективной линзе микроскопа приведена на рис. 3. В электронных микроскопах высокого разрешения величина r не должна превосходить 1—2 *мк*.

Второй важной ошибкой, возникающей вследствие дефектов юстировки, является полевая хроматическая аберрация. Ранее [7] нами было показано, что полная полевая хроматическая аберрация является векторной суммой аберраций, возникшей из-за несоосности линз и собственно полевой хроматической аберрации осесимметричной системы. Если последняя

аберрация в микроскопах высокого разрешения пренебрежимо мала, то хроматическая аберрация, возникшая из-за дефектов юстировки, может оказаться весьма существенной. Она не зависит от величины и направления токов в проекционной и промежуточной линзах микроскопа и может быть исправлена лишь средствами юстировки.

Для устранения полевой хроматической аберрации нужно средствами юстировки вывести магнитный и вольтовый центры на экран. К сожалению, из-за магнитных полей рассеяния и несовершенства юстировки промежуточной линзы эти центры не совпадают друг с другом. Для точного

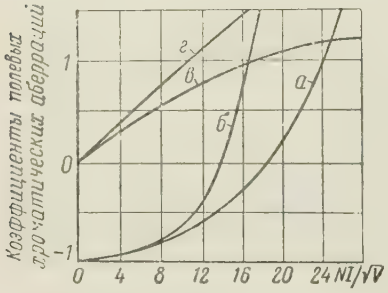


Рис. 4. Величины коэффициентов хроматических аберраций увеличения и поворота объектива (*а*, *г*), а также хроматических аберраций увеличения и поворота проекционной и промежуточной линз (*б*, *в*)

совмещения этих центров нужно вводить регулируемое отклоняющее поле между объективом и проективом, но в настоящее время этого не делают, справедливо полагая, что достаточная магнитная защита делает расхождение центров минимальным. Обычно юстировка микроскопа состоит в выводе на центр экрана точки без комы и одного из центров — вольтового или магнитного. Расхождение центров следует оценивать.

При выборе между центрами руководствуются следующими соображениями. Вывод в центр экрана вольтового центра устраняет полевую хроматическую аберрацию, вызванную колебаниями ускоряющего напряжения, но зато остается полевая хроматическая аберрация из-за колебаний тока в объективе, и, кроме того, при фокусировке изображение сдвигается по экрану. Вывод магнитного центра устраняет эти недостатки, но зато вследствие ухода вольтового центра возникает полевая хроматическая аберрация из-за колебаний ускоряющего напряжения. Какие же расхождения между вольтовым и магнитным центрами допустимы и какова необходимая точность юстировки? Необходимо напомнить формулы полевых хроматических аберраций [8].

$$\Delta r_v = \sqrt{(C_{m_o} + C_{m_i} + C_{m_p})^2 + (C_{\theta_o} + C_{\theta_i} + C_{\theta_p})^2}\, R_v \frac{\Delta V}{V}, \qquad (8)$$

$$\Delta r_i = 2\sqrt{C_{m_o}^2 + C_{\theta o}^2}\, R_i \frac{\Delta I}{I},$$

где под знаками корня стоят коэффициенты хроматических аберраций увеличения и поворота объектива (*о*), промежуточной (*i*) и проекционной (*p*) линз. Величины этих коэффициентов представлены на рис. 4. В формулах (8) R_v, R_i — расстояния от центра экрана до вольтового и магнитного центров (приведенные к объекту); $\Delta V/V$, $\Delta I/I$ — относительные колебания ускоряющего напряжения и тока.

Отметим, что приведенный на рис. 4 коэффициент хроматической аберрации увеличения промежуточной линзы совпадает с соответствующим коэффициентом проекционной аберрации лишь тогда, когда промежуточная линза работает с увеличением.

Определив коэффициенты хроматических аберраций и зная колебания ускоряющего напряжения и тока, по формулам (8) можем вычислить ве-

ичину хроматических ошибок и тем самым определить допустимые отклонения магнитного и вольтового центров R_i и R_v. Допуски на расхождение центров меняются в пределах нескольких микрон, в зависимости от ребуемого разрешения, имеющейся стабилизации, величин и направлений токов в линзах.

ЛИТЕРАТУРА

. W. Glaser, Z. Phys., 1942, **120**, 1.
. P. Sturrock, Philos. Trans. Roy. Soc. London A, 1951, **243**, 868, 387.
. Archard, J. Scient. Instrum., 1953, **30**, 352.
. В. Глазер, Основы электронной оптики, ГИТТЛ, 1957.
. K. Kanaya, Electrotechn. Laboratory, Tokyo, 1958, 13; J. of Electronmicroscopy, 1959, 7.
. S. Leisegang, Optik, 1954, **11**, 49, 397.
. Ю. Воробьев, А. Вязигин, Докл. АН СССР, 1959, **126**, 6, 1248.
. В. Верцнер, Ю. Воробьев, Оптика и спектроскопия, 1961, 1, 120.

Поступила в редакцию
7 II 1961

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

К РАСЧЕТУ ПОЛОСЫ ПРОПУСКАНИЯ ТРОПОСФЕРЫ ПРИ ДАЛЬНЕМ РАСПРОСТРАНЕНИИ УКВ

А. В. Просин

При дальнем тропосферном распространении УКВ поле в месте приема обычно представляет собой совокупность поля постоянной интенсивности и случайного поля. В этих условиях частотная характеристика тропосферы является случайной функцией частоты и времени. Под полосой пропускания тропосферы будем понимать такую полосу частот, в пределах которой с требуемой вероятностью неравномерность случайной частотной характеристики тропосферы не будет превышать какой-либо наперед заданной величины. В настоящем сообщении в развитие [1] определяется полоса пропускания тропосферы при наличии в месте приема постоянного и рассеянного полей.

Пусть амплитуды сигналов на частотах f_1 и f_2 подчинены обобщенному закону Релея

$$W_2(u_1,\ u_2) = \frac{u_1 u_2}{\sigma^4 (1-R^2)}\, e^{-\frac{u_1^2+u_2^2+u_{01}^2+u_{02}^2-2u_{01}u_{02}R}{2\sigma^2(1-R^2)}} \times$$

$$\times \sum_{m=0}^{\infty} \varepsilon_m I_m\left[\frac{Ru_1u_2}{\sigma^2(1-R^2)}\right] I_m\left[\frac{u_{01}-Ru_{02}}{\sigma^2(1-R^2)}\,u_1\right] I_m\left[\frac{u_{02}-Ru_{01}}{\sigma^2(1-R^2)}\,u_2\right], \qquad (1)$$

где u_1 и u_2, u_{01} и u_{02} — амплитуды суммарных и постоянных сигналов соответственно на частотах f_1 и f_2; σ^2 — дисперсия ортогональных составляющих случайного вектора поля; $R^2 = R_{13}^2 + R_{14}^2$; R_{13} и R_{14} — коэффициенты корреляции ортогональных составляющих случайного вектора поля; $\varepsilon_0 = 1$; $\varepsilon_m = 2$ при $m > 0$; I_m — бесселева функция m-го порядка чисто мнимого аргумента. В дальнейшем ограничимся рассмотрением случая, когда $u_{01} = u_{02} = u_0$.

Найдем функцию распределения вероятностей для отношения двух амплитуд, распределение которых описывается законом [1]. Для этого сперва определим плотность вероятности $W_2(u_1,k_1)$, где $k_1 = u_2/u_1$. Для перехода от переменных u_1, u_2 к новым переменным u_1, k_1 якобиан преобразования будет равен u_1. Тогда двумерная дифференциальная функция распределения величин u_1, k_1 будет равна

$$W_2(u_1,\ k_1) = \frac{k_1 u_1^3}{\sigma^4(1-R^2)}\, e^{-\frac{u_1^2(1+k_1^2)}{2\sigma^2(1-R^2)}}\, e^{-\frac{u_0^2}{\sigma^2(1+R_0)}} \times$$

$$\times \sum_{m=0}^{\infty} \varepsilon_m I_m\left[\frac{Ru_1^2k_1}{\sigma^2(1-R^2)}\right] I_m\left[\frac{u_0u_1}{\sigma^2(1+R)}\right] I_m\left[\frac{u_0k_1u_1}{\sigma^2(1+R)}\right]. \qquad (2)$$

Поскольку $0 \leqslant u_1 \leqslant \infty$ и $0 \leqslant u_2 \leqslant \infty$, то $0 \leqslant k_1 \leqslant \infty$.

Из формулы (2) для случая рассеянного распространения УКВ будем иметь

$$W_2(u_1,\ k_1) = \frac{k_1 u_1^3}{\sigma^4(1-R^2)}\, e^{-\frac{u_1^2(1+k_1^2)}{2\sigma^2 1-R^2)}}\, I_0\left[\frac{Ru_1^2k_1}{\sigma^2(1-R^2)}\right]. \qquad (3)$$

Выражение (3) было получено в работе [1].

Одномерная дифференциальная функция распределения величины k_1 равна

$$W_1(k_1) = \int_0^{\infty} W_2(u_1,\ k_1)\, du_1. \qquad (4)$$

Для вычисления (4) при использовании (2) разложим бесселевы функции в следую-

ie ряды:

$$I_m(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(0{,}5x)^{(m+2n)}}{n!\Gamma(m+n+1)}, \tag{5}$$

е Γ — гамма-функция.

При использовании (2) и (5) вычисление (4) сводится к нахождению интегралов

$$t^{\mu-1} I_\nu(\alpha, t)\, e^{-\beta^2 t^2} dt = \frac{\Gamma\left(\frac{\mu+\nu}{2}\right)\left(\frac{\alpha}{2\beta}\right)^\nu}{2\beta^\mu \Gamma(\nu+1)} e^{-\frac{\alpha}{4\beta^2}} {}_1F_1\left(\frac{\nu-\mu}{2}+1,\ \nu+1,\ -\frac{\alpha^2}{4\beta^2}\right), \tag{6}$$

ie ${}_1F_1$ — вырожденная гипергеометрическая функция, или

$$\int_0^\infty x^n e^{-ax^2} dx = \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{2a^{\frac{n+1}{2}}}. \tag{7}$$

ормулы (6) и (7) используются при разложении в (2) соответственно двух или ех бесселевых функций.

Решение (4) при использовании (3) сводится к нахождению интеграла

$$\int_0^\infty e^{-at} I_0(bt)\, t dt = \frac{2a\Gamma(1{,}5)}{(a^2-b^2)^{1{,}5}\sqrt{\pi}}. \tag{8}$$

Осуществив вычисление (4), получим

$$W_1(k_1) = 2(1-R^2)\, e^{-z\frac{2}{1-R}} \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{l=0}^{\infty} \frac{\varepsilon_m R^{(m+2k)} z^{(m+l)} \Gamma(2+2m+2k+l)}{k!l!m!\Gamma(m+k+1)\Gamma(m+l+1)} \times$$

$$\times\, e^{z\frac{k_1^2}{1+k_1^2}} \frac{k_1^{(2m+2k+1)}}{(1+k_1^2)^{(2m+2k+2l+2)}} {}_1F_1\left[-(2+m+2k+l),\ (m+1),\ -z\frac{k_1^2}{(1+k_1^2)}\right] \tag{9}$$

ри использовании (6) и

$$W_1(k_1) = 2(1-R^2)\, e^{-z\frac{2}{1-R}} \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\varepsilon_m z^{(m+l+n)} R^{(m+2k)}}{k!\,l!\,n!} \times$$

$$\times \frac{\Gamma(2+2m+2k+l+n)\, k_1^{(1+2m+2k+2n)}}{\Gamma(m+k+1)\Gamma(m+l+1)\Gamma(m+n+1)(1+k_1^2)^{(2+2m+2k+l+n)}} \tag{10}$$

ри использовании (7), где

$$z = \gamma^2 \frac{(1-R)}{(1+R)}; \tag{11}$$

$$\gamma^2 = \frac{u_0^2}{2\sigma^2}, \tag{12}$$

. е. γ^2 равно отношению мощности регулярного сигнала к мощности случайного игнала.

В отсутствие постоянной составляющей ($u_0 = 0$, $\gamma = 0$, $z = 0$) из (9) или (10) олучим

$$W_1(k_1) = 2(1-R^2) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma[2(k+1)]\, k_1^{(2k+1)}}{\Gamma^2(k+1)(1+k_1^2)^{2(k+1)}} R^{2k} \tag{13}$$

или, используя (8), будем иметь

$$W_1(k_1) = \frac{2k_1(1-R^2)}{(1+k_1^2)^2\left[1-R^2\left(\frac{2k_1}{1+k_1^2}\right)^2\right]^{1{,}5}}. \tag{14}$$

Последняя формула была получена в [1].

Определим вероятность события, которое заключается в том, что отношения амплитуд $k_1 = u_2/u_1 \leqslant K$ или $k_2 = u_1/u_2 \leqslant K$, где $K \leqslant 1$ — наперед заданное отношение амплитуд. Очевидно, что дифференциальные функции распределения величин

k_1 и k_2 равны. Тогда, учитывая несовместимость одновременного появления отношений k_1 и k_2, получим согласно правилу сложения несовместимых событий

$$P_1(k<K) = \text{Вер}\{k_1 \leqslant K \text{ или } k_2 \leqslant K\} = \int_0^K W_1(k_1)\,dk_1 + \int_0^K W_1(k_2)\,dk_2 = 2\int_0^K W_1(k)\,dk. \quad (15)$$

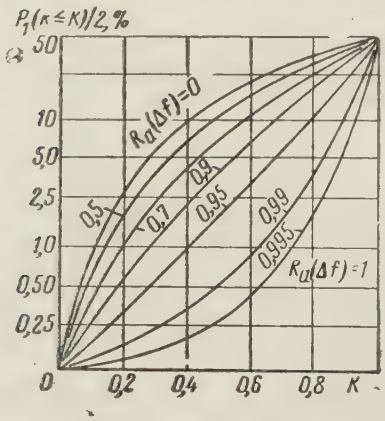
Подставляя (10) в (15) и осуществив интегрирование, получим

$$P_1(k<K) = 2(1-R^2)\,e^{-z\frac{2}{(1-R)}} \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{\infty} \varepsilon_m (-1)^s z^{(m+l+n)} \times$$
$$\times R^{(m+2n)} \frac{(m+k+n)!\,\Gamma(2+2m+2k+l+n)\,(1+m+k+l+s)^{-1}}{k!l!n!s!\Gamma(m+k+1)\,\Gamma(m+l+1)\,\Gamma(m+n+1)\,(m+k+n-s)!} \times$$
$$\times [1-(1-K^2)^{-(1+m+k+l+s)}]. \quad (16)$$

Для линий связи с большими интервалами между промежуточными станциями весьма часто величина $z \ll 1$, что соответствует, например, $\gamma < 1$ и $R > 0{,}7$. В этом случае выражение (16) значительно упрощается и его можно записать так:

$$P_1(k<K) = e^{-z\frac{2}{(1-R)}}\left[1 - \frac{1-K^2}{\sqrt{(1+K^2)^2 - 4R^2K^2}}\right]. \quad (17)$$

При $\gamma = 0$ из (17) имеем выражение для случая рассеянного распространения УКВ, которое было получено в [1]. На рисунке при $\gamma = 0$ приведена зависимость $P_1 = f(K)$ (17) для различных $R_a(\Delta f)$, построенная по данным [1]. Согласно [2] при $z < 1$ связь между R и коэффициентом частотной корреляции амплитуд сигналов (который можно получить из эксперимента) определяется соотношением



$$R_{a\gamma}(\Delta f) \simeq R^{2e^{-\gamma^2}} = R_a(\Delta f)^{e^{-\gamma^2}}, \quad (18)$$

где $R_a(\Delta f)$ — коэффициент частотной корреляции амплитуд сигналов при наличии в месте приема случайной составляющей поля. На основании [3] величина

$$R_a(\Delta f) \simeq R^2 = \exp\left\{-\frac{\pi^2}{32}\left(\frac{\Delta f}{\Delta f_2}\right)^2\right\}, \quad (19)$$

где Δf_2 — некоторая эффективная полоса пропускания тропосферы в случае использования направленных антенн. Полное выражение для Δf_2 и ее зависимость от различных параметров рассмотрены в работе [4].

Рассмотрим пример определения полосы пропускания тропосферы для $\gamma = 0$. Пусть задано, что в пределах полосы неравномерность ее частотной характеристики не будет превышать 3 $дб$ ($K = 0{,}7$) в течение 85% времени. Из рисунка и формулы (19) получим

$$\Delta f \simeq 0{,}4\,\Delta f_2. \quad (20)$$

При $d = 300$ $км$, $R_э = 8500$ $км$, $p = 1$, $n_1 = 2$, $a = 1$, $c = 3 \cdot 10^5$ $км/сек$ (обозначения величин d, $R_э$, p, n_1, a и c даны в [4]) полоса пропускания тропосферы $\Delta f \simeq 550$ $кгц$.

Из анализа (17), (20) и рисунка следует, что полоса пропускания тропосферы возрастает при увеличении эффективной полосы, интенсивности постоянной волны и коэффициента частотной корреляции.

ЛИТЕРАТУРА

1. И. А. Гусятинский, Ширина полосы и мощность переходных помех при радиосвязи рассеянием в тропосфере, Электросвязь, 1959, 4, 3.
2. И. А. Гусятинский, Искажения сигнала при распространении УКВ за пределами прямой видимости, Сб. трудов НИИ МС СССР, 1959, 1(15), 15.
3. А. В. Просин, В. Ф. Губский, К теории разнесенного приема при дальнем тропосферном распространении УКВ, Радиотехника, 1959, 14, 5, 23.
4. А. В. Просин, К расчету мощности перекрестных шумов в системах дальней связи, Радиотехника и электроника, 1961, 6, 1, 14.

Поступило в редакцию
27 III 1961

К СИНТЕЗУ АНТЕННЫ С КРУГЛЫМ РАСКРЫВОМ

Б. М. Минкович, Ю. И. Давидчевский

При осуществлении диаграмм направленности «карандашного» типа основную роль играют антенны с круглым раскрывом. До сих пор, однако, недостаточно развиты методы, позволяющие осуществлять синтез амплитудного распределения по заданной диаграмме направленности антенны с круглым раскрывом. Ниже описан новый метод синтеза такого распределения.

При использовании апертурного метода плоский раскрыв, с точки зрения диаграммы направленности в одной из плоскостей, можно заменить эквивалентной линейной антенной, амплитудное распределение которой определяется формой и амплитудным распределением антенны с круглым раскрывом [1]. Для круглого раскрыва с симметричным синфазным амплитудным распределением эквивалентная антенна одинакова для всех плоскостей, и амплитудное распределение этой антенны можно найти из следующего выражения:

$$I_1(\xi) = \int_0^{\sqrt{1-\xi^2}} A(\rho)\, d\eta, \tag{1}$$

где $I_1(\xi)$ — амплитудное распределение эквивалентной линейной антенны; $A(\rho)$ — амплитудное распределение антенны с круглым раскрывом; ξ, η — приведенные декартовы координаты в раскрыве; $\rho = \sqrt{\xi^2+\eta^2}$; $\eta = \sqrt{1-\xi^2}$ — уравнение огибающей раскрыва (окружности).

В настоящее время методика синтеза амплитудного распределения линейных антенн по заданной диаграмме направленности разработана достаточно полно в ряде работ, например в [2]. Поэтому в том случае, когда $I_1(\xi)$ может быть найдено, исходя из заданной пространственной диаграммы направленности антенны с круглым раскрывом, равенство (1) может служить уравнением, которое позволит найти $A(\rho)$.

В дальнейшем будем считать $I_1(\xi)$ известным.

1. После замены переменных $\xi^2+\eta^2 = t$ уравнение (1) получит вид

$$\frac{1}{2}\int_{\xi^2}^{1} A(\sqrt{t})\, \frac{dt}{\sqrt{t-\xi^2}} = I_1(\xi). \tag{2}$$

Уравнение (2) представляет собой частный случай интегральных уравнений первого рода — уравнение Абеля. Как известно [3], уравнение Абеля можно решить в общем виде. Применяя обычную методику, получим решение уравнения (1) в следующей форме:

$$A(\rho) = \frac{2}{\varphi\Pi}\left[\frac{I_1(1)}{\sqrt{1-\rho^2}} - \int_{\rho}^{1} \frac{I_1'(y)\, dy}{\sqrt{y^2-\rho^2}}\right], \tag{3}$$

причем ρ входит в выражение под знаком интеграла как параметр.

Отметим, что формула (3) справедлива для функций $I_1(\xi)$, симметричных относительно оси $\xi = 0$, даже если переменная ξ входит в $I_1(\xi)$ в нечетной степени. Например, для $I_1(\xi) = 1 - |\xi|$ соответствующее распределение

$$A(\rho) = \frac{2}{\varphi\Pi} \ln\left(\frac{1}{\rho} + \sqrt{\frac{1}{\rho^2}-1}\right).$$

Интегральный член в (3) пропадает, если $I_1(\xi) = \text{const}$. Следовательно, распределение типа

$$\frac{I_1(1)}{\sqrt{1-\rho^2}} \tag{4}$$

создает в круглом раскрыве эффективное равномерное распределение, т. е. диаграмма направленности антенны с круглым раскрывом с амплитудным распределением типа (4) совпадает с диаграммой направленности линейной антенны с равномерным распределением.

Внеинтегральный член в формуле (3) отличен от нуля только в случае, когда $I_1(\xi)$ имеет при $\xi = 1$ «пьедестал», т. е. $I_1(1) \neq 0$. Таким образом, выражение (3) позволяет довольно просто рассчитывать амплитудные распределения антенн с круглым раскрывом, аналогичные распределениям линейных антенн.

2. Рассчитаем описанным выше методом квазиоптимальное распределение антенны с круглым раскрывом. Выражение для квазиоптимального распределения эквивалентной линейной антенны возьмем в виде, предложенном в [4]. Тогда, представив в (3)

$J_1(\xi)$ из [4], получим выражение для квазиоптимального распределения антенны с круглым раскрывом

$$\frac{A(\rho)}{A(0)} = \frac{\beta^3}{\beta \operatorname{sh}\beta - \operatorname{ch}\beta + 1} A_1(\gamma), \tag{5}$$

где β определяет уровень боковых лепестков ($\operatorname{ch}\beta$ есть относительный уровень боковых лепестков оптимальной антенны);

$$A_1(\gamma) = \frac{\gamma \operatorname{sh}\gamma - \operatorname{ch}\gamma + 1}{\gamma^3}; \tag{6}$$

$$\gamma = \beta\sqrt{1-\rho^2}. \tag{7}$$

График функции $A_1(\gamma)$ показан на рис. 1.

Функция $A_1(\gamma)$ является фактически ненормированным квазиоптимальным амплитудным распределением, но по оси абсцисс откладывается не ρ, а величина γ, определяемая β и ρ. Часть графика, лежащая левее значения $\gamma = \beta$, представляет собой амплитудное распределение антенны с круглым раскрывом, которое с приближением ρ к единице ($\gamma \to 0$) стремится к бесконечности.

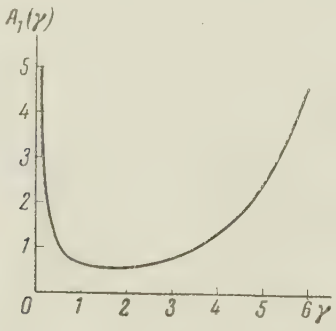


Рис. 1

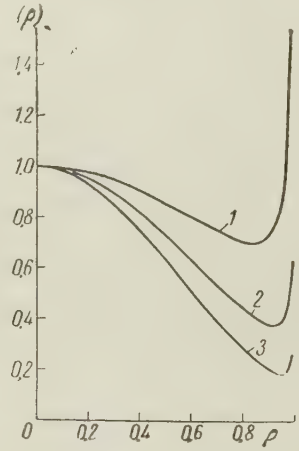


Рис. 2

На рис. 2 кривые *1*, *2* и *3* представляют собой нормированные значения амплитудного распределения в зависимости от ρ для трех значений β: 3; 4,2 и 5,3 соответственно. Эти значения для оптимальной антенны дают уровень боковых лепестков 20; 30,4 и 40 *дб* или для квазиоптимальной антенны примерно на 6 *дб* меньше. Кривые рис. 2 воспроизведены до $\rho = 0{,}99$; на промежутке от 0,99 до 1 $A(\rho)$ возрастает до бесконечности. Расчет кривых после того, как построен график функции $A_1(\gamma)$, сводится к разбиению шкалы γ для различных β. Эти кривые похожи на кривые из [5], за исключением, конечно, значений на краю. Хотя квазиоптимальное распределение антенны с круглым раскрывом имеет на краю бесконечное значение, которое практически осуществить нельзя, влияние этого всплеска на диаграмму направленности можно оценить.

Описанный выше метод позволяет связать между собой линейные антенны и антенны с круглым раскрывом: в последние переносятся распределения, «характерные» для линейных антенн, и, наоборот, выражение (1) позволяет перенести на линейные антенны амплитудные распределения, которым соответствуют диаграммы направленности, «характерные» для антенн с круглым раскрывом.

Отметим, что формула (3) справедлива и для несинфазных симметричных амплитудно-фазовых распределений.

ЛИТЕРАТУРА

1. G. F. Koch, Flächenstrahler mit kleinen Nebenmaxima, Fernmeldetechn. Z., 1954, 7, 10, 498.
2. G. H. Brown, Pattern synthesis — simplified methods of array design to obtain a desired directive pattern, RCA Rev., 1959, **20**, 3, 398.
3. И. И. Привалов, Интегральные уравнения, ОНТИ, 1935.
4. Б. М. Минкович, К вопросу о квазиоптимальных линейных синфазных антеннах с непрерывным распределением тока, Радиотехника и электроника, 1959, 4, 6, 1057.
5. R. C. Hansen, Tables of Taylor distributions for circular aperture antennas, IRE Trans., 1960, AP-8, 1, 23.

Поступило в редакцию
30 VI 1960

ПЕРЕХОДНЫЕ ПРОЦЕССЫ В ДВУХКОНТУРНОМ ПАРАМЕТРИЧЕСКОМ УСИЛИТЕЛЕ

Ю. А. Ильинский, М. Д. Карасев

1. АНАЛИЗ ПЕРЕХОДНЫХ ПРОЦЕССОВ

Стационарный режим двухконтурного параметрического усилителя рассмотрен энли и Роу, Геффнером и Вейдом и др. [1—5]. В этих работах использованы энергетические соотношения Мэнли и Роу [1], а для более детального анализа применялся принцип гармонического баланса при условии малого сигнала.

В настоящей работе рассматриваются переходные процессы в параметрическом усилителе в предположении малого сигнала, т. е. установление колебаний и работа усилителя при импульсном сигнале.

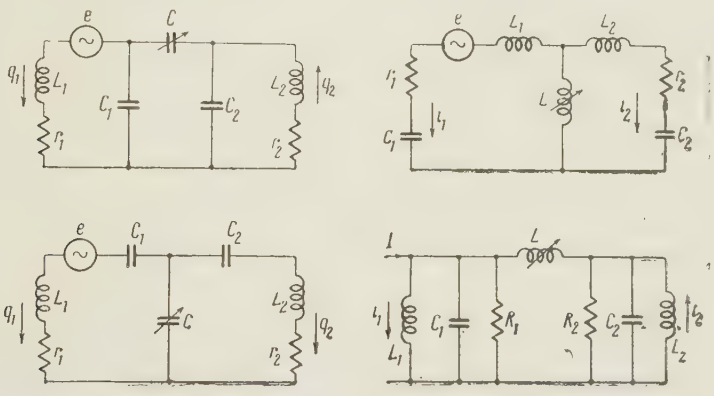


Рис. 1. Схемы двухконтурных параметрических усилителей

Схемы двухконтурных параметрических усилителей показаны на рис. 1. Это — истемы с двумя степенями свободы и одним периодически меняющимся реактивным лементом.

В подходящих координатах (см. рис. 1) уравнения таких систем можно записать в виде

$$\ddot{x}_i + \omega_i^2 x_i = \mu\,(-2\delta_i \dot{x}_i + \alpha_i f(\omega t)\,(x_1 + x_2) + e_i). \qquad (1)$$

Здесь $i = 1,2$ — индекс, относящийся к первому или второму контуру; e_1— внешняя ила; $e_2 = 0$; μ — малый параметр; δ — затухание i-го контура; f — периодическая ункция периода 2π; ω — частота изменения параметра.

Как следует из вида уравнений (1), затухание контуров и глубина модуляции реактивной связи считаются малыми. Таким образом, добротность контуров считается большой, и параметрическая связь между контурами полагается слабой. Тогда колебания в системе будут близки к гармоническим. Что же касается постоянной связи между контурами, то она может быть и немалой; в этом случае достаточно перейти к нормальным координатам системы, которая отличается от исходной исключением активных сопротивлений и параметрической связи. При этом получаются уравнения, несколько более сложные, чем (1), но по форме укороченные уравнения оказываются такими же, как и укороченные уравнения системы (1).

Уравнения (1) можно решить одним из квазилинейных методов. Наиболее удобен метод усреднения [6]. Для его применения надо сначала привести уравнения (1) к стандартной форме.

Рассмотрим сначала случай так называемого обращающего модулятора [5], т. е. пусть $\omega \simeq \omega_1 + \omega_2$. Для приведения уравнений к стандартной форме полагаем сначала как обычно

$$x_i = Z'_i e^{j\omega_i t} + Z'_{-i} e^{-j\omega_i t},$$

$$\dot{x}_i = j\omega_i \left(Z'_i e^{j\omega_i t} - Z'_{-i} e^{-j\omega_i t} \right),$$

$i = 1, 2$; $Z'_{-i} = Z'^{*}_i$ — комплексные амплитуды.

Пусть $e_i = E_i e^{jpt} + E_{-i} e^{-jpt}$, где $E_1 = E$; $E_2 = 0$; p — частота внешней сил ($p \simeq \omega_1$); E — медленно меняющаяся комплексная амплитуда внешней силы. Обозначим $\mu\Delta_1 = p - \omega_1$, $\mu\Delta_2 = (\omega - p) - \omega_2$ и введем замену комплексных амплиту

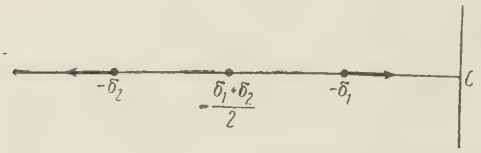


Рис. 2. Характеристические корни пр оптимальной настройке

$Z_i' = Z_i e^{j\Delta_i t}$. Тогда для Z_i получим уравнения в стандартной форме. Усреднени правых частей полученных уравнений дает укороченные уравнения

$$\dot{Z}_1 = \mu\left\{-\left(\delta_1 + j\Delta_1 + \frac{j\alpha_1 f_0}{2\omega_1}\right) Z_1 - \frac{j\alpha_1 f_1}{2\omega_1} Z_{-2} + \frac{E}{2j\omega_1}\right\},$$

$$\dot{Z}_{-2} = \mu\left\{-\left(\delta_2 - j\Delta_2 - \frac{j\alpha_2 f_0}{2\omega_2}\right) Z_{-2} + \frac{j\alpha_2 f_{-1}}{2\omega_2} Z_1\right\}, \qquad (2)$$

где f_0, f_1, f_{-1} — коэффициенты Фурье функции $f(\omega t)$;

$$f(\omega t) = \sum_{k=-\infty}^{k=+\infty} f_k e^{j\omega k t}.$$

Будем считать, что $f_0 = 0$, так как можно ввести $\Delta_i' = \Delta_i + \frac{\alpha_i f_0}{2\omega_i}$ и таким образом

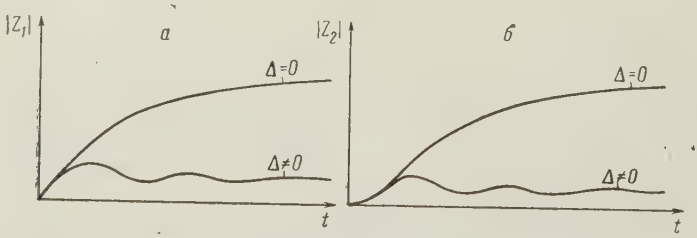


Рис. 3. Установление амплитуды в первом (*а*) и втором (*б*) контурах

учесть расстройку за счет постоянной составляющей связи. Решение линейных уравнений (2) с постоянными коэффициентами легко находится при любой внешней силе E и любых начальных условиях. Так, можно найти переходный режим, т. е. установление колебаний в системе при $E = \text{const}$ и нулевых условиях $Z_i(0) = 0$ (т. е. $x_i(0) = x_i(0)$). Уравнения имеют вид матричного уравнения

$$\dot{Z} = AZ + B,$$

$$\dot{Z} = \begin{pmatrix} Z_1 \\ Z_2 \end{pmatrix}, \qquad B = \mu \frac{E}{2j\omega_1}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Его решение, удовлетворяющее начальным условиям $Z(0) = 0$, есть [7]

$$Z = \int_1^t e^{A(t-s)} B(s)\, ds =$$

$$= \frac{1}{\mu^2(\lambda_2 - \lambda_1)}\left\{\frac{1 - e^{\mu\lambda_1 t}}{\lambda_1}[AB - \lambda_2 B] - \frac{1 - e^{\mu\lambda_2 t}}{\lambda_2}[AB - \lambda_1 B]\right\}, \qquad (3)$$

где $\mu\lambda_{1,2}$ — характеристические числа матрицы

$$A=\mu\begin{pmatrix}-(\delta_1+j\Delta_1) & -\dfrac{j\alpha_1 f_1}{2\omega_1}\\ \dfrac{j\alpha_2 f_{-1}}{2\omega_2} & -(\delta_2-j\Delta_2)\end{pmatrix}.$$

При $t\to\infty$ получаем стационарное решение, совпадающее, например, с опубликованным в [3].

Решение (3) можно записать подробнее:

$$Z_1=\frac{E}{2j\omega_1(\lambda_2-\lambda_1)}\left[-\frac{\delta_1+j\Delta_1+\lambda_2}{\lambda_1}(1-e^{\mu\lambda_1 t})+\frac{\delta_1+j\Delta_1+\lambda_1}{\lambda_2}(1-e^{\mu\lambda_2 t})\right], \tag{4}$$

$$Z_{-2}=\frac{E}{2j\omega_1(\lambda_2-\lambda_1)}\frac{j\alpha_2 f_{-1}}{2\omega_2}\left[\frac{1-e^{\mu\lambda_1 t}}{\lambda_1}-\frac{1-e^{\mu\lambda_2 t}}{\lambda_2}\right].$$

Учтем, что

$$x_i=Z_i e^{j\omega_i t}\,e^{j\mu\Delta_i t}+\text{компл. сопряж.}=2\,|Z_i|\cos[(\omega_i+\mu\Delta_i)\,t+\arg Z_i].$$

Здесь $|Z_i|$ и $\arg Z_i$ — медленно меняющиеся амплитуда и фаза колебаний с частотой $\omega_i+\mu\Delta_i$, т. е. p и $\omega-p$.

Из формул (3) — (4) следуют выводы.

1) В двухконтурном параметрическом усилителе время установления не зависит от соотношения между фазой внезапно приложенного сигнала и фазой пульсаций параметра. Фаза колебаний в первом контуре также не зависит от фазы пульсаций параметра, а фаза колебаний во втором контуре складывается из фаз входного сигнала и параметра.

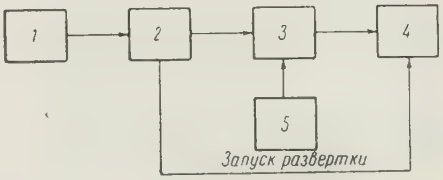


Рис. 4. Блок-схема экспериментальной установки:

1 — генератор сигнала; *2* — модулятор; *3* — параметрический усилитель; *4* — осциллограф; *5* — генератор накачки

2) При оптимальной настройке ($\Delta_1=\Delta_2=0$) характеристические корни $\lambda_{1,2}$ действительны и равны

$$\lambda_{1,2}=-\frac{1}{2}\left[(\delta_1+\delta_2)\pm\sqrt{(\delta_1-\delta_2)^2+\frac{\alpha_1\alpha_2}{\omega_1\omega_2}|f_1|^2}\right].$$

При $f_1=0$ (нет изменения параметра) они, естественно, равны $-\delta_1$ и $-\delta_2$, а при увеличении $|f_1|$ расходятся симметрично относительно середины отрезка ($-\delta_2$, $-\delta_1$) (см. рис. 2). Когда меньший по абсолютной величине корень достигает нуля, система самовозбуждается. Когда этот корень уменьшается по абсолютной величине, то увеличивается длительность переходного процесса ($\sim 1/-\lambda$). Как следует из (4), переходный процесс в случае $\Delta_1=\Delta_2=0$ представляет собой сумму двух экспонент в первом контуре и разность двух экспонент во втором контуре; при этом $\left.\dfrac{dz_{-2}}{dt}\right|_{t=0}=0$. Переходный процесс в соответствии с этим имеет вид, показанный на рис. 3,*а* для первого контура и на рис. 3, *б* для второго контура. Что касается длитель-

ности переходного процесса, то она определяется при большой регенерации меньшим по абсолютной величине характеристическим числом и пропорциональна коэффициенту усиления по напряжению.

3) Если имеется расстройка контуров (Δ_1 или $\Delta_2 \neq 0$), то $\mathrm{Im}\,\lambda_{1,2} \neq 0$ и переходный процесс содержит затухающие осцилляции (см. рис. 3). Если при этом $\Delta_1 + \Delta_2 = 0$, т. е. имеется только расстройка внешнего сигнала, то частота этих осцилляций равна расстройке внешней силы Δ_1. Если же $\Delta_1 = 0$, но $\Delta_2 \neq 0$ — имеется расстройка частоты накачки, то частота осцилляций в переходном процессе меньше, чем расстройка, и много меньше, если $\delta_2 \gg \delta_1$, как это обычно имеет место.

Аналогичные формулы можно получить для необращающего модулятора из уравнений для $Z = \begin{pmatrix} Z_1 \\ Z_2 \end{pmatrix}$.

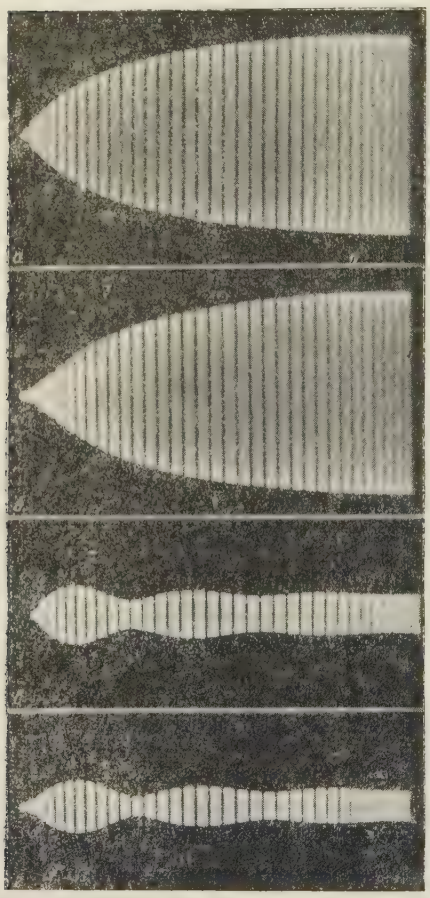


Рис. 5. Осциллограммы напряжений на первом контуре (*а*), втором контуре (*б*) при оптимальной настройке и при расстройке частоты внешнего сигнала, равной 1 *кгц* (*в*, *г*)

2. ЭКСПЕРИМЕНТ

Экспериментально наблюдались переходные процессы в балансной схеме параметрического усилителя с частотой первого контура 100 *кгц* и частотой второго — около 400 *кгц* (рис. 4).

В качестве периодически меняющейся емкости применялись диоды ДГЦ-25, ДГЦ-27 и Д-809.

Применение балансной схемы и частичного включения контуров позволило избавиться от напряжения накачки и гармоник этого напряжения (появляющихся из-за наличия в схеме нелинейной емкости) на контурах усилителя без применения добавочных фильтров.

На рис. 5 показаны осциллограммы напряжений на первом и втором контурах параметрического усилителя с метками времени 100 *мксек*.

При расстройках возникали затухающие осцилляции в переходном процессе. Их частота равна расстройке, если меняется частота входного сигнала, и меньше (в нашем эксперименте примерно в 10 раз), если расстраивается генератор накачки или второй контур.

Длительность переходного процесса растет примерно пропорционально коэффициенту усиления по напряжению.

ЛИТЕРАТУРА

1. J. M. Manly, H. E. Rowe, Proc. I. R. E., 1956, 44, 7, 904.
2. H. E. Rowe, Proc. I. R. E., 1958, 46, 5, 850.
3. H. Heffner, G. Wade, J. Appl. Phys., 1958, 29, 9, 1321.
4. S. Bloom, K. Chang, RCA Rev., 1957, 18, december, 578.
5. М. Д. Карасев, Успехи физ. наук, 1959, 69, 2, 217.
6. Н. Н. Боголюбов, Ю. В. Митропольский, Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний, ГИФМЛ, 1958.
7. Ф. Р. Гантмахер, Теория матриц, ГТТИ, 1954.

Физический факультет
Московского государственного
университета им. М. В. Ломоносова

Поступило в редакцию
1 VI 1960

О МОДЕЛИРОВАНИИ И РАСЧЕТЕ ТРАЕКТОРИЙ РЕЛЯТИВИСТСКИХ ЗАРЯЖЕННЫХ ЧАСТИЦ В ЭЛЕКТРОСТАТИЧЕСКИХ ПОЛЯХ

А. М. Страшкевич

Как известно, одним из самых наглядных и общих методов нахождения траекторий релятивистских частиц в электростатическом поле является метод гравитационных моделей. Нами было показано [1, 2], что этот метод можно распространить и на релятивистский случай, для чего рельеф должен изготовляться не в соответствии с потенциалом Φ (как в нерелятивистском случае), а с так называемым эффективным потенциалом Φ*. Для Φ* имеем следующее выражение:

$$\Phi^* = \Phi - \frac{1}{2}\frac{e\Phi^2}{m_0 c^2}, \tag{1}$$

где e — алгебраическое значение заряда; $c = 3\cdot 10^{10}$ *см/сек*; m_0 — масса покоя. Хотя траектории релятивистской частицы в поле с потенциалом Φ и нерелятивистской — в поле с потенциалом Φ* (движение последней и моделируется в предложенном методе) одинаковы, однако (как и указывается в [1,2]) закон изменения скорости на этих траекториях оказывается различным. Между тем, можно получить простое соотношение между этими скоростями, которое может быть использовано при исследовании движения релятивистской частицы методом эффективного потенциала или основанными на нем приближенными экспериментальными методами.

Обозначим через $v_р$ и $v_н$ скорости релятивистской (с массой покоя m) и нерелятивистской (с массой m_0) частиц на тождественных траекториях (релятивистской частицы — в поле с потенциалом Φ, нерелятивистской — в поле с потенциалом Φ*) и запишем соответственно уравнения энергии для этих частиц следующим образом:

$$m_0 c^2\left(\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v_р^2}{c^2}}} - 1\right) + e\Phi = 0, \tag{2}$$

$$\frac{m_0 v_н^2}{2} + e\Phi^* = 0. \tag{3}$$

Обозначаем, как обычно принято, $\left(1-\frac{v_р^2}{c^2}\right)^{-1/2} = \alpha$; из (2) находим

$$\alpha = 1 - \frac{e\Phi}{m_0 c^2}. \tag{4}$$

Кроме того, из (2) получаем следующее выражение для $v_р$:

$$v_р = \frac{c\sqrt{-e\Phi\,(2m_0 c^2 - e\Phi)}}{m_0 c^2 - e\Phi}. \tag{5}$$

Из (2) и (1) следует

$$v_н = \frac{\sqrt{-e\Phi\,(2m_0 c^2 - e\Phi)}}{m_0 c}; \tag{6}$$

из (4), (5), (6)

$$v_н : v_р = \alpha = m : m_0 \tag{7}$$

Следовательно, на рассматриваемых тождественных траекториях в соответственных точках одинаковы импульсы (количества движения) частиц:

$$m_0 v_н = m v_р. \tag{8}$$

Поэтому, фотографируя, например, в прерывистом свете шарик, движение которого моделирует движение частицы с массой m_0 и скоростью $v_н$ в поле с потенциалом Φ*, можно найти закон изменения импульса релятивистской заряженной частицы в поле с потенциалом Φ; если желательно узнать скорость $v_р$, то для этого нужно разделить значения $v_н$ на величину α, вычисляемую по (4).

Тот же результат можно получить из соотношений работы [3], в которой для аналитического нахождения траекторий релятивистских частиц применен метод «временно́го параметра». Суть метода заключается в том, что вводится некоторый параметр τ при помощи равенства

$$\frac{dt}{d\tau} = \frac{m}{m_0}, \tag{9}$$

что позволяет свести релятивистские уравнения движения к нерелятивистским (по форме), но при изменении напряженности поля в α раз. В самом деле, уравнение дви-

жения

$$\frac{d\left(m\frac{d\vec{l}}{dt}\right)}{dt} = e\vec{E} \tag{10}$$

заменой t из (9) превращается в

$$m_0 \frac{d^2\vec{l}}{d\tau^2} = e\alpha\vec{E}. \tag{11}$$

Из равенства (9) получается наше соотношение (7), если учесть, что τ есть не просто математический параметр, вводимый для преобразования уравнений, а параметр, имеющий вполне определенный физический смысл (что в [3] совершенно не рассматривается): τ есть время движения нерелятивистской частицы в поле эффективного потенциала Φ^*. В самом деле, дифференцируя (1), находим

$$\operatorname{grad}\Phi^* = \alpha \operatorname{grad}\Phi; \tag{12}$$

поэтому, переходя от рассмотрения движения частицы с переменной массой m в поле Φ к рассмотрению движения частицы с постоянной массой m_0 в поле Φ^* (в чем и состоит метод эффективного потенциала, впервые предложенный Богуславским [4]), мы получаем уравнения, тождественные тем, к которым приводит метод временно́го параметра. Записав основное соотношение этого метода (9) в виде

$$\frac{dl}{d\tau} : \frac{dl}{dt} = \alpha, \tag{13}$$

приходим к нашей формуле (7).

ЛИТЕРАТУРА

1. А. М. Страшкевич, Докл. АН СССР, 1956, 108, 3, 440.
2. А. М. Страшкевич, Электронная оптика электростатических полей, не обладающих осевой симметрией, Физматгиз, 1959.
3. A. Pignedoli, Z. angew. Math. und Mech., 1958, 38, 9/10, 343.
4. С. Богуславский, Пути электронов в электромагнитных полях, Тр. Института физики, 1929.

Поступило в редакцию
3 X 1960

ДВУХАНОДНЫЙ ЭЛЕКТРОННЫЙ ПРОЖЕКТОР ДЛЯ ЭЛЕКТРОННЫХ ПРИБОРОВ СВЧ

Ю. В. Троицкий

В настоящем сообщении рассматривается двуханодный электронный прожектор, позволяющий создать аксиально-симметричный пучок электронов, который выходит из прожектора параллельно оси и может иметь диаметр как больше, так и меньше диаметра катода. Геометрия прожектора схематически показана на рис. 1. Фокуси-

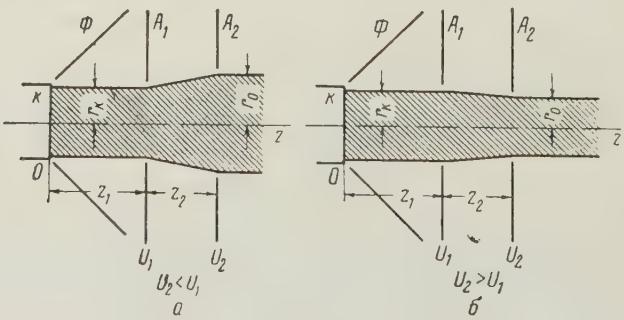


Рис. 1

рующий электрод Φ, расположенный вблизи катода K, имеет такую форму и потенциал, что электроны, выходящие из катода, движутся параллельно оси (как в прожекторе Пирса с параллельным потоком [1]). Сформированный в этой области пучок проходит через отверстия в первом и втором анодах, имеющих потенциалы U_1 и U_2.

В случае, показанном на рис. 1, *а*, отверстие первого анода служит рассеивающей линзой, а отверстие второго анода — собирающей; на рис. 1, *б* аноды меняются ролями.

Знак каждой анодной линзы зависит от электрического поля до и после линзы. Так как считается, что между катодом и первым анодом поле ускоряющее, а за вторым анодом поле равно нулю, то знак линз однозначно определяется отношением потенциалов анодов. Изменяя потенциалы анодов, можно так подобрать фокусные расстояния собирающей и рассеивающей линз, что непосредственно за вторым анодом электронные траектории будут параллельны оси. Этот случай благоприятен для дальнейшей фокусировки пучка продольным магнитным полем; при этом магнитное поле должно вводиться в пучок в точке, где электроны не имеют радиальных скоростей, т. е. сразу за плоскостью второго анода.

Расчет параметров этого прожектора был произведен при упрощающем предположении, что в области между анодами можно пренебречь взаимным расталкиванием электронов. Считалось, что в области между катодом и первым анодом потенциал возрастает по тому же закону, что и в плоском диоде с током, ограниченным за счет пространственного заряда; в области между анодами потенциал изменяется линейно с расстоянием; потенциал пространства за вторым анодом равен потенциалу этого анода. Пучок считался параксиальным, фокусные расстояния анодных апертур рассчитывались по формуле Дэвиссона и Кэлбика (формула (7.12) в [1]).

Исходными данными для расчета прожектора можно считать: радиус пучка r_0 в плоскости второго анода, ток пучка I_0, потенциал U_2 второго анода (определяющий скорость электронов по выходе из прожектора). Расчет прожектора сводится к определению расстояний z_1 и z_2 (рис. 1), радиуса катода $r_к$ и потенциала первого анода U_1.

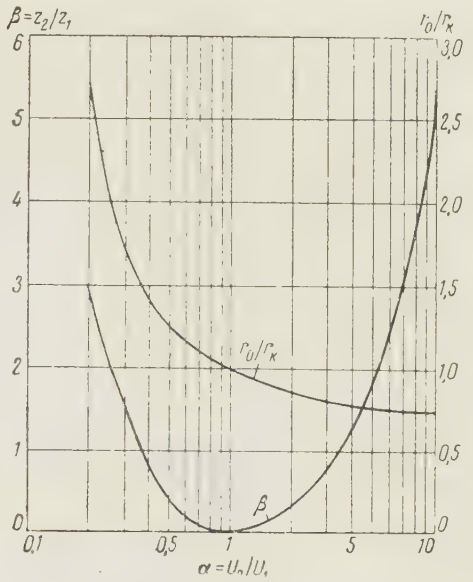


Рис. 2

На основании сделанных допущений и формул (7.12), (7.21) и (7.22) в [1] чисто алгебраически можно получить следующие формулы для радиуса r_0 и наклона траекторий $(dr/dz)_0$ граничных электронов пучка после прохождения плоскости второго анода:

$$r_0 = r_к\left[1 - \frac{\alpha - 1 - \frac{4}{3}\beta}{2(\alpha^{1/2}+1)}\right], \tag{1}$$

$$\left(\frac{dr}{dz}\right)_0 = -\frac{r_к}{8\alpha z_2}\left(3\alpha^{3/2} - 3\alpha - 3\alpha^{1/2} + 3 - 4\beta\alpha^{1/2} + \frac{4}{3}\beta\right). \tag{2}$$

Здесь обозначено: $\alpha = U_2/U_1$; $\beta = z_2/z_1$.

Налагаем условие $(dr/dz)_0 = 0$. Это дает соотношение между α и β, справедливое при $z_2 \neq 0$:

$$\frac{z_2}{z_1} = \beta = \frac{9}{4}\,\frac{\alpha^{3/2} - \alpha - \alpha^{1/2} + 1}{3\alpha^{1/2} - 1}. \tag{3}$$

К уравнениям (1) и (3) следует добавить связь между током и напряжением в плоском диоде, частью которого является область катод — первый анод. На основании этих трех формул по заданным I_0, r_0 и U_2 можно определить z_1, z_2, U_1 и $r_к$. Так как число неизвестных на единицу больше числа уравнений, то одно из этих неизвестных может быть задано, например $r_к$ (что определяет плотность тока на катоде).

На рис. 2 показана зависимость β и $r_0/r_к$ от α, полученная из формул (1) и (3). При одном и том же значении z_2/z_1 прожектор может быть как рассеивающим ($\alpha < 1$, $r_0/r_к > 1$), так и собирающим ($\alpha > 1$, $r_0/r_к < 1$). Следует отметить, что принятые при выводе формул допущения теряют смысл в окрестности точки $\beta = 0$, так как при малых значениях z_2 (порядка диаметра апертур в анодах) область между анодами нельзя рассматривать как сочетание двух тонких линз и области постоянного градиента.

Более точный расчет траекторий электронов между анодами с учетом пространственного заряда приведен в работе [2]. Описанная конструкция прожектора применена в малошумящей лампе бегущей волны 10-*см* диапазона с магнитно-ограниченным пучком [3]. Следует отметить, что формула (35) в [3] отличается от формулы (3) настоящей статьи, так как она выведена без учета фокусирующих свойств области постоянного поля между анодами.

Полученные формулы были подвергнуты экспериментальной проверке на прожекторе, имеющем $z_1 = 2{,}4$ *мм*, $z_2 = 1{,}75$ *мм* и $r_к = 0{,}65$ *мм*. Эта проверка производилась при помощи специального прибора, описанного в [4]. Измерения, проведенные при $U_1 = 200$ *в*, показали, что наклон траекторий по выходе из второго анода при $U_2 > U_1$ равен нулю при двух значениях α : 3,2 и 5. Первое значение близко к $\alpha = 2{,}9$ — величине, получающейся при расчете по формуле (3). Вторая цифра $\alpha = 5$ не может быть получена из формулы и связана, по-видимому, с расплыванием пучка под влиянием пространственного заряда в области между анодами.

Расчет по формуле (2) для $\alpha = 5$ показывает, что в отсутствие пространственного заряда пучок по выходе из прожектора должен сходиться. Взаимное расталкивание электронов пучка в области между анодами приводит к уменьшению угла сходимости и к образованию «шейки» сразу за плоскостью второго анода.

Рассмотренный тип электронных прожекторов может быть использован в приборах типа ламп бегущей и обратной волн и т. д. при необходимости получить параллельный оси пучок электронов с небольшой проводимостью и диаметром несколько меньшим или бо́льшим диаметра катода.

ЛИТЕРАТУРА

1. Дж. Р. Пирс. Теория и расчет электронных пучков, перев. с англ., Изд. Советское радио, 1956.
2. K. C. Ho, IRE Trans., 1955, ED-2, 3, 10.
3. F. N. H. Robinson, R. Compfner, Proc. I. R. E., 1951, 39, 8, 918.
4. Ю. В. Троицкий, Приборы и техника эксперимента, 1957, 6, 113.

Поступило в редакцию
29 IX 1960

О РАСПРЕДЕЛЕНИИ ПРИМЕСЕЙ В ОБЛАСТИ СВАРНОГО КОНТАКТА НА АРСЕНИДЕ ГАЛЛИЯ

С. И. Иванов

В настоящее время большое внимание уделяется исследованию свойств диодов из арсенида галлия со сварным контактом [1, 2]. В данной работе исследован характер распределения примеси в области выпрямляющего контакта при использовании материала с разным удельным сопротивлением. В качестве метода исследования использовалось измерение зависимости емкости контакта C от обратного смещения в диапазоне СВЧ.

Таблица

ρ, *ом·см*	0,006	0,04
n, $см^{-3}$	$5 \cdot 10^{17}$	$3 \cdot 10^{16}$
μ, $см^2/сек \cdot в$	1500	3000

Диоды изготавливались из арсенида галлия n-типа с удельным сопротивлением $\rho = 0{,}006$ и 0,04 *ом·см*. Концентрация основных носителей и холловская подвижность, полученные из измерений постоянной Холла и удельного сопротивления, приведены в таблице. Для изготовления диодов вырезались пластинки размером $1{,}7 \times 1{,}7 \times 0{,}5$ *мм*. Травление проводилось в смеси щелочи и перекиси водорода [3]. Выпрямляющий контакт малой площади получался следующим образом. На электролитически заточенную медную или серебряную проволоку (диаметр острия ~ 5 *мк*) наносился сплав 9% Zn + Sn, острие доводилось до контакта с кристаллом и сваривалось пропусканием импульса тока 0,25—0,5 *а* длительностью 10 *мсек* в прямом направлении.

Результаты исследований статических вольтамперных характеристик показали, что зависимость тока I от приложенного напряжения U (при прямых смещениях) имеет вид $I \sim e^{\alpha U}$, где $\alpha \simeq 30$ $в^{-1}$. Для определения закона распределения примесей в выпрямляющем контакте измерялась емкость контакта C на частоте $\omega = 2 \cdot 10^{10}$ и $6 \cdot 10^{10}$ $сек^{-1}$ согласно методике [4]. Из полученных данных (см. рис. 1 и 2) следует, что зависимость емкости C от обратного смещения $U_{обр}$ имеет вид $C \sim (\varphi_к + U_{обр})^{-\frac{1}{n}}$, где $\varphi_к \simeq 1$ *в*. Для диодов из материала $\rho = 0{,}04$ *ом·см* $n \simeq 3$; такая зависимость характерна для случая, близкого к линейному распределению примесей в области выпрямляющего контакта. Для диодов из материала $\rho = 0{,}006$ *ом·см* $n = 2$, что свидетельствует о резком распределении примесей в области выпрямляющего контакта. Характер зависи-

сти емкости от обратного смещения в наших опытах определялся только исходным ельным сопротивлением материала и не зависел от материала контактной проволоки едь или серебро).

Наличие линейного распределения примесей в области выпрямляющего контакта я диодов из материала $\rho = 0{,}04$ *ом·см* свидетельствует о том, что в процессе сварки, -видимому, происходят необратимые изменения концентрации примесей и дефектов малой области вблизи контакта. Это может быть связано либо с процессами диффузии имесей, либо с образованием акцепторных нтров из-за большого давления острия на верхность кристалла и высокой температуры.

Для проверки последнего предположения л проделан следующий опыт. Образцы арсенида галлия с $\rho = 0{,}04$ *ом·см* размером $\times 2 \times 2$ *мм* прогревались в течение мин в графитовом держателе током до температуры 700—800° С. Сравнение данных

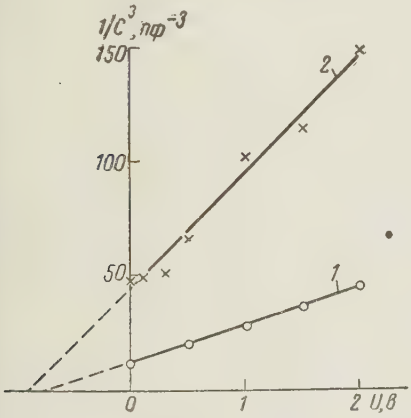


Рис. 1. Зависимость $1/C^3$ от обратного смещения для диодов из материала с $\rho = 0{,}04$ *ом·см* (*1* — острие из Cu, *2* — острие из Ag)

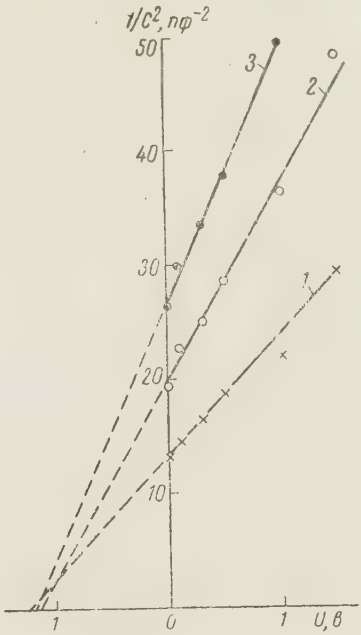


Рис. 2. Зависимость $1/C^2$ от обратного смещения для диодов из материала с $\rho = 0{,}006$ *ом·см* (*1* и *2* — острия из Ag, *3* — острие из Cu)

змерений постоянной Холла и удельного сопротивления до и после нагрева показали, то удельное сопротивление и постоянная Холла возрастают приблизительно в два раза. Холловская подвижность при этом не меняется. Аналогичные результаты влияния термообработки на удельное сопротивление GaAs приведены в [5, 6]. Таким образом, нагрев материала в процессе сварки может привести к росту удельного сопротивления к изменению концентрации примесей под контактом.

В случае использования материала с $\rho = 0{,}006$ *ом·см* изменение концентрации примесей и дефектов под контактом мало по сравнению с исходной концентрацией примесей в материале, и получается выпрямляющий контакт с резким распределением примесей.

ЛИТЕРАТУРА

1. D. A. Jenny, Proc. I. R. E., 1958, **46**, 4, 717.
2. W. M. Sharpless, Bell. System Techn., J., 1959, **38**, 1, 259.
3. Д. Н. Наследов, А. Я. Патракова, Б. В. Царенков. ЖТФ, 1958, **28**, 4, 779.
4. Ю. Ф. Соколов, Радиотехника и электроника, 1961, **6**, 3, 399.
5. J. N. Allen, J. Electronics. and Control, 1959, **7**, 3, 254.
6. J. J. Wysocki, J. Appl. Phys., 1960, **31**, 9, 1686.

Поступило в редакцию
14 II 1961

ТЕРМОЭМИССИОННЫЕ СВОЙСТВА КАРБИДОВ ГАФНИЯ И НИОБИЯ И БОРИДОВ СКАНДИЯ И ТУЛИЯ

В. С. Фоменко

В настоящее время для изыскания новых катодных материалов проводится широкое исследование эмиссионных и электрических свойств различных тугоплавких соединений, в частности боридов и карбидов редких и редкоземельных металлов [1—6].

В настоящем сообщении описаны исследования эмиссионных свойств диборида скандия, гексаборида тулия с небольшой примесью его тетраборида и карбидов гафния и ниобия, данные по которым в литературе отсутствуют.

Препараты для исследования были получены по методикам, описанным в работах [7, 8].

Измерения проводились по методике, описанной в работе [5], методом прямых Ричардсона в прямонакальных диодах с охранными кольцами. Катодом служила танталовая, вольфрамовая или молибденовая проволока ø 0,3 *мм*, игравшая роль керна. Проволока покрывалась суспензией соответственно из танталового, вольфрамового или молибденового порошка в нитробиндере для создания шероховатости катода. Сверху наносилось исследовавшееся вещество в виде пасты из порошка, разведенного в нитробиндере. Толщина готового катода составляла 0,8—1,2 *мм*.

Катод прокаливался (при этом одновременно нанесенная паста припекалась к керну) при откачке и обезгаживании лампы. Режим прокаливания: температура 1700° К, давление $\sim 10^{-5}$ *мм* рт. ст.

Температура катода измерялась пирометрически через специальное отверстие в аноде, причем вносилась поправка на излучение материала. Коэффициенты излучения исследовавшихся в работе соединений приведены в [9].

Для борида тулия производился рентгенографический анализ исходного вещества и вещества, снятого с керна катода после измерения термоэмиссионных характеристик. Сравнение этих рентгенограмм показало, что при прокаливании материала фазовых превращений не происходит, в отличие от данных, приведенных авторами работы [5] для аналогичных случаев.

Результаты измерений сведены в таблицу.

Таблица

Вещество	φ, *эв*	A, *а/см²·град²*	Температурный интервал измерения, °К	Плотность тока эмиссии при температуре 1400° К, *а/см²*
ScB_2	$2{,}29 \pm 0{,}08$	$\sim 10^{-5}$	1100—1600	$5{,}0 \cdot 10^{-6}$
TuB_6 (+ TuB_4)	$0{,}6 - 0{,}9$	$\sim 10^{-6}$	1100—1800	$1{,}69 \cdot 10^{-4}$
HfC	$2{,}03 \pm 0{,}2$	$\sim 10^{-5}$	1100—1400	$7{,}5 \cdot 10^{-4}$
NbC	$2{,}23 \pm 0{,}04$	$\sim 10^{-6}$	1200—1400	$9{,}5 \cdot 10^{-6}$

Следует отметить, что для катодов на различных кернах получались одинаковые значения φ и A, что связано со значительной толщиной слоя исследуемого материала.

Малую работу выхода борида тулия можно объяснить тем, что термоэлектронный эффект здесь замаскирован явлением β-распада, вследствие чего определение истинной работы выхода борида тулия затруднительно, а может быть даже и невозможно.

ЛИТЕРАТУРА

1. D. Goldwater, R. Haddad, J. Appl. Phys., 1951, 22, 1, 70.
2. M. Lafferty, J. Appl. Phys., 1952, 22, 3, 299.
3. Г. В. Самсонов, В. С. Нешпор, Г. А. Кудинцева, Радиотехника и электроника, 1957, 2, 5, 631.
4. Г. А. Кудинцева, Б. М. Царев, В. А. Эпельбаум, Сб. «Бор», Тр. конференции по химии бора и его соединений, Госхимиздат, 1958, стр. 106.
5. Г. А. Кудинцева, Б. М. Царев, Радиотехника и электроника, 1958, 3, 3, 428.
6. R. Pidd, G. Grover, D. Roehling, E. Salmi, J. Farr, N. Krikorian, W. Witteman, J. Appl. Phys., 1959, 30, 10, 1575.
7. Г. В. Самсонов, Я. С. Уманский, Твердые соединения тугоплавких металлов, Металлургиздат, 1957.
8. Г. В. Самсонов, Ю. Б. Падерно, Бориды редкоземельных металлов, Изд. АН УССР, 1960.
9. Т. И. Серебрякова, Ю. Б. Падерно, В. С. Фоменко, Информационное письмо № 245 ИМСС АН УССР, 1960.

Институт металлокерамики
и специальных сплавов АН УССР

Поступило в редакцию
7 IX 1960

1961 № 8

ХРОНИКА

МЕЖДУВЕДОМСТВЕННЫЙ СЕМИНАР ПО КАТОДНОЙ ЭЛЕКТРОНИКЕ

(19-е заседание)

На 19-м заседании междуведомственного семинара по катодной электронике, состоявшемся 3 апреля 1961 г. в Институте радиотехники и электроники АН СССР, было заслушано 8 докладов.

Н. Д. Моргулис в докладе «Проблема непосредственного преобразования тепловой энергии в электрическую» рассмотрел намечающиеся сейчас новые методы эффективного преобразования тепловой энергии в электрическую, связанные с использованием принципов физики электронных явлений в вакууме, газах и твердых телах. К этим методам преобразования относятся: непосредственные — термоэлектрический и термоэлектронный; полунепосредственный — магнитогазодинамический. Автором были рассмотрены физические принципы работы подобных преобразователей, современное состояние их исследований и разработок экспериментальных конструкций установок такого типа, а также возможные области их использования в электроэнергетике будущего.

С докладом «Некоторые исследования холодных катодов из окиси магния с самоподдерживающейся эмиссией» от имени коллектива авторов (Н. Я. Басалаева, М. И. Елинсон, Д. В. Зернов, Т. М. Екименко, Я. С. Савицкая, А. А. Яснопольская) выступил М. И. Елинсон. Авторами проведен ряд исследований катодов из окиси магния с целью выявления физического механизма их эмиссии и возможности улучшения рабочих параметров; детально разработана технология получения катодов из окиси магния с применением методов опрыскивания и катафореза; варьировались толщины покрытий, определялись гранулометрический состав, пористость и шероховатость.

Обнаружено существование оптимума количества вводимого в слой окиси магния кислорода. Установлено, что образование промежуточного слоя NiO между керном и слоем MgO несущественно. Показано, чо наличие кислорода принципиально необходимо, и он не является просто окислителем оставшихся примесей. Установлена обратимая температурная зависимость самоподдерживающейся эмиссии при температурах до 400° С. Максимум эмиссии соответствует температуре около 300° С. Установлены также необратимые изменения эмиссии, связанные с температурой. Одна из причин таких изменений — миграция и удаление кислорода. Тенденция к насыщению вольтамперных характеристик связана с влиянием температуры.

Исследован процесс формирования эмиссии во времени. Выяснено, что времена формирования больше 0,05 *сек* и уменьшаются при увеличении тока эмиссии и увеличении тока накала стартера.

Авторами установлено, что самоподдерживающаяся эмиссия зависит от магнитного поля, накладываемого параллельно электрическому полю в слое окиси магния. Определена минимальная толщина слоя, при которой удается возбудить самоподдерживающуюся эмиссию.

Дано объяснение физического механизма эмиссии за счет ударной ионизации в зернах окиси магния электронами, ускорившимися в порах, дырочной проводимости по зернам окиси магния, вызываемой наличием кислорода, играющего роль акцептора для электронов, образованных при ударной ионизации, что приводит к изгибу энергетических зон в зернах окиси магния и активации дырочной проводимости.

В дискуссии по докладу приняли участие П. В. Тимофеев, Н. Д. Моргулис, Б. П. Никонов.

В докладе «Исследование методом молекулярного пучка взаимодействия молекул с поверхностью твердого тела» В. Б. Леонас описал метод получения интенсивных молекулярных пучков и результаты исследования их свойств до и после столкновения с поверхностью.

Д. М. Мамбетов сделал доклад «Об одном виде эмиссии отрицательно заряженных частиц с поверхности диэлектрической пленки на металлической подкладке». При исследовании α-излучения урана автором и В. В. Чердынцевым было обнаружено большое число «посторонних» импульсов, спадающих до нуля в течение некоторого времени. Детальное исследование показало, что причиной возникновения импульсов является тонкий слой двойного сульфата натрия на металлической подкладке. В докладе дается описание α-счетной установки, примененной при исследовании описанных явлений. Автором был выдвинут ряд гипотез, объясняющих наблюдаемые явления.

Выступившие в дискуссии В. Б. Сандомирский и Г. Н. Шуппе отметили, что полученных данных недостаточно для объяснения механизма эмиссии.

С докладом «Взаимодействие окиси бария с вольфрамом в вакууме» выступили Б. П. Никонов и О. М. Полторак. Докладчиками был проведен анализ возможных реакций в системе BaO—W на основе сравнения давления кислорода в равновесии с каждым из веществ в разных состояниях и при различных температурах, определенных с использованием метода химического потенциала. Анализ показал, что ни при каких условиях давление кислорода в равновесии с вольфрамом не может быть меньше, чем с барием. Авторы утверждают, что в высоком вакууме характерно состояние динамического равновесия, при котором $P_{Ba} = 2P_{O_2}$, где P_{Ba} — давление пара бария; P_{O_2} — давление кислорода. При этих условиях возможно окисление вольфрама с образованием нестехиометрических окислов и их соединений с окисью бария.

В. П. Кирсанов доложил о влиянии молекулярных примесей на работу катода циркониевой лампы. Дуговые лампы с цирконневым катодом, являющиеся «точечными» источниками света, относятся к типу электродосветных ламп. При работе этих ламп обнаружена зависимость величин яркости и размеров пятна от присутствия в лампе молекулярных газов. Автором был предложен приближенный метод расчета величины светового пятна.

С докладом «К вопросу бомбардировки пленок окиси бария на металлических подложках при высоких энергиях бомбардирующих электронов» выступили П. В. Пошехонов и Ю. В. Москвичев. Авторами был проведен масс-спектрометрический анализ газов, выделяющихся при электронной бомбардировке молибденовых мишеней, покрытых продуктами испарения оксидного катода.

А. В. Дружинин сделал доклад «О природе эмиттирующей поверхности металлопленочных катодов». Элекгронно-оптическое исследование Л-катода, прессованного вольфраматного и пропитанного алюминатного катодов показало, что их поверхность состоит из набора хорошо эмиттирующих пятен на фоне слабо эмиттирующей поверхности с работой выхода около 2,7*эв*. Автор предполагает, что поверхность металлопленочного катода нормальной активности покрыта пленкой бария с концентрацией меньше оптимальной, а наблюдаемые яркие пятна являются следствием повышения концентрации в месте выхода бария или «просвечивания» удачной грани под слоем бария.

А. А. Яснопольская, Р. П. Вихляева, Т. М. Екименко

MTA Számítástechnikai Könyvtára

CONTENTS

Armand N. A., Vvedenskiy B. A. Influence of radiation pattern of antennas upon calculation of radiowave diffraction around the Earth 1219
Kubasov P. E. Investigation of space-time microwave field level correction in propagation through turbulent atmosphere 1228
Shirman Ya. D. Statistical analysis of optimum resolution 1237
Maliuzhenets G. D., Vainstein L. A. Transverse diffusion during diffraction on an impedance cylinder of a large radius. P. I. Parabolic equation in beam coordinates. 1247
Khaskind M. D. Wave exitation on an impedance plane. 1259
Kinber B. E. Electromagnetic waves diffraction on the concave surface of a circular cylinder. 1273
Vaganov R. B., Meriakri V. V. Suppression of resonance phenomena in multimode waveguides 1284
Pavlov P. P. Electromagnetic field and current distribution along an infinite isolated wire in a conductive medium. 1293
Viglin S. I. Transfer characteristic of a coaxial system with periodic structure 1308
Lazarev A. V., Filimonov G. F. Static characteristics of a plane magnetron . . 1316
Postnov G. A. Conditions of slow wave existence in an isotropic plasma waveguide 1325
Apushkinskiy G. P. On the problem of radiometer sensitivity. 1328
Gribnikov Z. S., Kompan V. N., Sviatogor L. V. Investigation of channel triodes 1330
Elinson M. I., Dobriakova F. F., Krapivin V. F., Malina Z. A., Yasnopolskaya A. A. On the theory of field and thermoionic-field emission of metals and semiconductors. 1342
Kogan Sh. M. Thermal radiation stimulated by hot carriers in semiconductors 1354
Der-Schwarz G. V., Kushnir Yu. M., Rozenfeld L. B., Zaitsev P. V., Bezlepkin S. V., Trutneva I. S., Belenkiy S. A., Titov L. A. Some problems of reflex electron microscopy 1358
Verzner V. N., Nikiforova V. G., Bogdanovskiy G. A., Kozelkin V. V., Shetnev Ya. F. Light-electron microscope EM-6 1365
Berlaga R. Ya., Konorov P. P., Rudenok M. I. Electron-microscope investigations of Ge surface 1370
Pilankevich A. N. Calculation of the characteristics of the scattering of mean energy electrons on free atoms 1374
Stoyanov P. A., Grishina N. M. Removal of the astigmatism of the intermediate lense of an electron microscope using a stigmator during microdiffraction . . 1378
Stoyanov P. A. Alignment of an electron microscope by means of electromagnetic fields. 1382
Vorobiev Yu. V. Analysis of aberrations appearing due to failures of preparation and alignment of electron microscopes 1386

BRIEF REPORTS

Prosin A. V. On the calculation of the bandwidth of long-range tropospheric propagation at UHF. 1392
Minkovich B. M., Davidchevskiy Yu. I. On the synthesis of an antenna with circuit aperture 1395
Ilyinskiy Yu. A. Karasev M. D. Transients in a two-circuit parametric amplifier 1397
Strashkevich A. M. Modelling and calculating the trajectories of relativistic charged particles in electrostatic fields. 1401
Troitskiy Yu. V. Two-anode electron gun for microwave electron devices . . . 1402
Ivanov S. N. Distribution of impurities in the region of the welded contact on GaAs 1404
Fomenko V. S. Thermoionic properties of HfC, NbC, ScB, $TuB_6 + TuB_4$ . . . 1406

CHRONICLE

Yasnopolskaya A. A., Vikhliaeva R. P., Ekimenko T. M. Interinstitutional seminar on cathode electronics (The 19th meeting) 1407

Цена 1 руб. 38 коп.